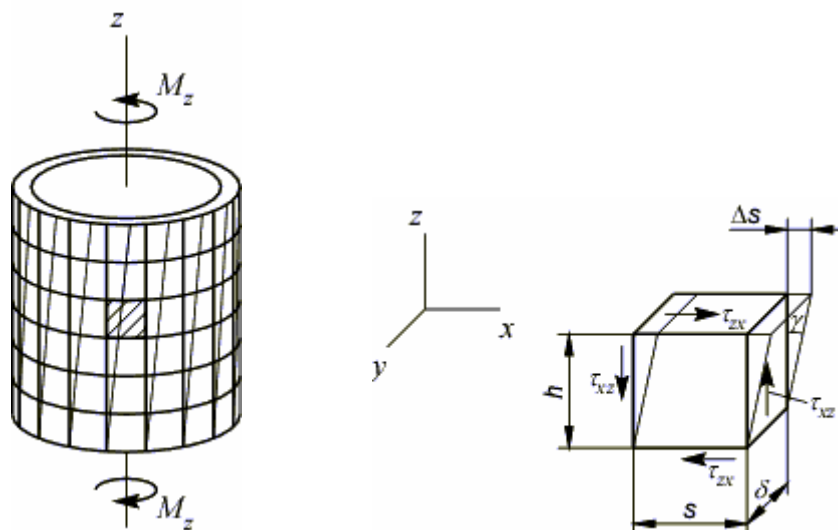


6 Кручение.

6.1 Чистый сдвиг и его особенности

Сдвигом называется вид деформации, предшествующей срезу.

Рассмотрим тонкостенную трубку, нагруженную скручивающими моментами. Нанесем на поверхность трубки до нагружения сетку с прямоугольными ячейками. После нагружения ячейки станут параллелограммами. Выделим из стенки трубы элементарный параллелепипед.



На горизонтальных площадках выделенного элемента действуют касательные напряжения τ_{zx} , образующие пару сил. Исходя из условий статического равновесия, на смежных вертикальных площадках должны возникнуть напряжения τ_{xz} . Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \tau_{zx} \cdot s \cdot \delta \cdot h = \tau_{xz} \cdot h \cdot \delta \cdot s,$$

Откуда $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ – закон парности касательных напряжений.

Напряженное состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Результатом действия касательных напряжений является появление смещения Δs (абсолютный сдвиг) и угла γ (угол сдвига). В силу малости деформаций:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{h},$$

поэтому угол сдвига называется также относительным сдвигом.

Испытание материалов в условиях чистого сдвига проводят при кручении тонкостенных трубчатых образцов. По результатам испытания строят диаграмму сдвига:

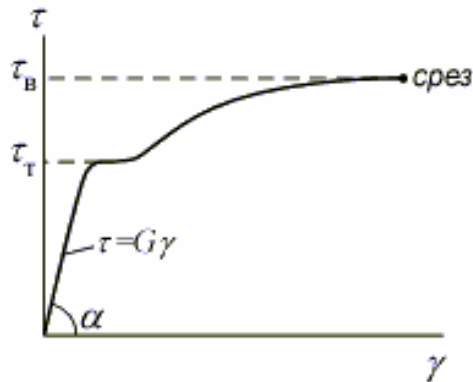


Диаграмма сдвига качественно сходна с диаграммами растяжения и сжатия. На начальном участке диаграммы наблюдается линейная зависимость между касательным напряжением и углом сдвига:

$$\tau = G\gamma \quad (6.1)$$

(6.1) – закон Гука при сдвиге, где коэффициент пропорциональности G называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода.

Установлено, что характеристики сдвига связаны с характеристиками растяжения. Так, для изотропных материалов выполняется следующее соотношение между модулями упругости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

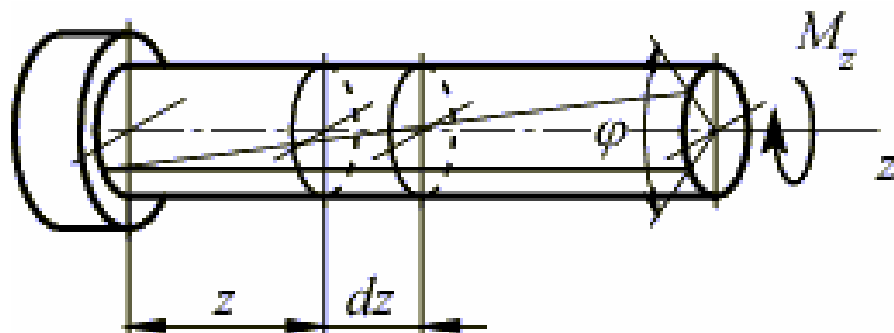
Кроме того, для большинства материалов предел текучести при сдвиге τ_T может быть выражен через предел текучести при растяжении σ_T :

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \approx 0,6\sigma_T$$

6.2 Кручение стержней круглого профиля

При кручении стержней круглого профиля справедлива гипотеза Бернулли: поперечные сечения, плоские до приложения внешнего момента, остаются плоскими и после нагружения, поворачиваясь относительно друг друга на некоторый угол.

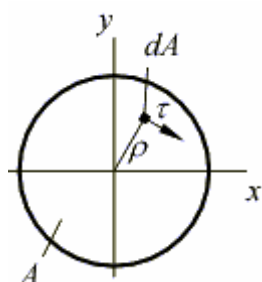
Рассмотрим консольный стержень круглого поперечного сечения, нагруженный в концевом сечении моментом M_z . Свободное сечение стержня поворачивается на угол ϕ (абсолютный угол закручивания).



Выведем формулы для определения напряжений и перемещений стержня, рассмотрев три стороны задачи.

1. Статическая сторона задачи

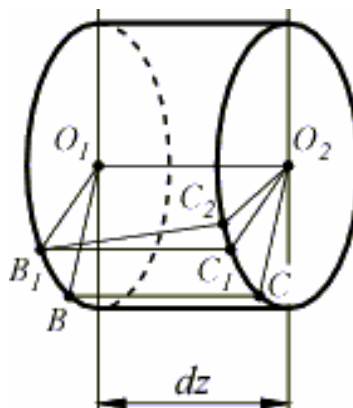
Воспользуемся интегральным уравнением равновесия, связывающим крутящий момент с касательным напряжением:



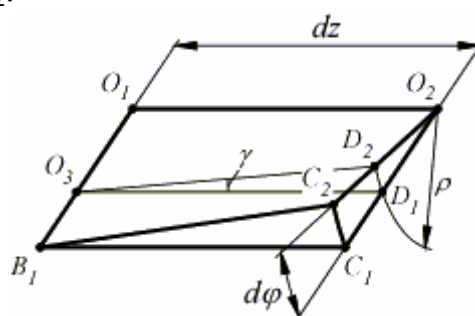
$$M_z = \int_A \tau \rho \cdot dA \quad (6.2)$$

2. Геометрическая сторона задачи

Выделим элемент стержня длиной dz. В результате кручения торцевые сечения этого элемента поворачиваются, причем точки В и С переходят в положения В₁ и С₂.



Выделим в правом торцевом сечении дугу D₁D₂ на расстоянии rho от центра тяжести сечения O₂.



Выразим длину дуги через угол сдвига γ элементарный угол закручивания $d\varphi$

$$D_1 D_2 = dz \cdot \gamma,$$

$$D_1 D_2 = \rho \cdot d\varphi,$$

Откуда

$$dz \cdot \gamma = \rho \cdot d\varphi,$$

и угол сдвига

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}.$$

Введем следующее обозначение $\frac{d\varphi}{dz} = \Theta$ - относительный угол закручивания, тогда

$$\gamma = \rho \cdot \Theta. \quad (6.3)$$

3. Физическая сторона задачи

Подставим выражение (6.3) в формулу (6.1):

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \Theta. \quad (6.4)$$

Полученное выражение подставляем в формулу (6.2)

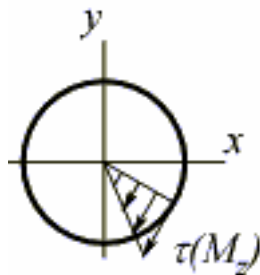
$$M_z = \int_A G \Theta \rho^2 \cdot dA = G \Theta \int_A \rho^2 \cdot dA = G \Theta J_p,$$

откуда относительный угол закручивания

$$\Theta = \frac{M_z}{G J_p}. \quad (6.5)$$

где $G J_p$ - жесткость поперечного сечения при кручении.

Подставляя (6.5) в (6.4), получим формулу для касательных напряжений:



$$\tau = G \Theta \rho = \frac{M_z \rho}{J_p}.$$

Таким образом, касательные напряжения при кручении изменяются по радиусу сечения линейно.

Таким образом, условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} \leq [\tau],$$

где $W_p = \frac{\rho}{J_p}$ – полярный момент сопротивления.

$W_p = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления для круга

r – радиус поперечного сечения стержня.

Условие жесткости при кручении может быть записано через относительный угол закручивания

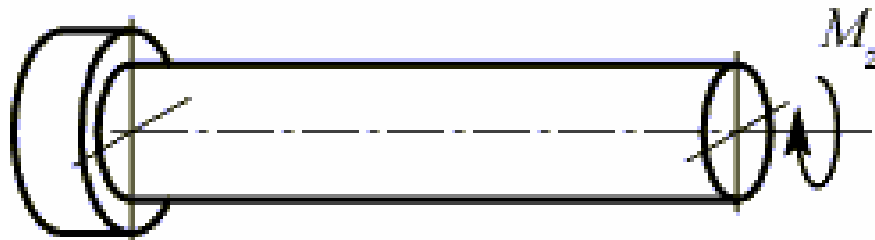
$$\Theta_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{GJ_p} \leq [\Theta],$$

либо через абсолютный угол закручивания

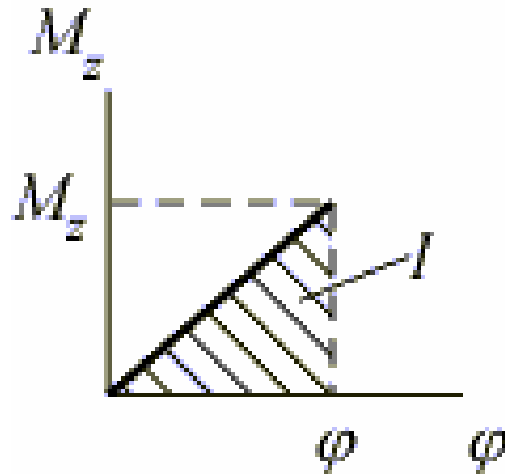
$$\varphi_{\max} = \int_l \Theta dz = \int_l \frac{M_z^{\max}}{GJ_p}, \varphi_{\max} \leq [\varphi],$$

6.3 Потенциальная энергия деформации кручения

Рассмотрим стержень, нагруженный скручивающим моментом M_z .



Закон нагружения стержня:



откуда работу внешнего момента можно определить по теореме Клапейрона как

$$I = \frac{1}{2} M_z \varphi,$$

где φ - угол поворота сечения, в котором приложен момент M_z .

При статическом нагружении уравнение энергетического баланса $I=U$,

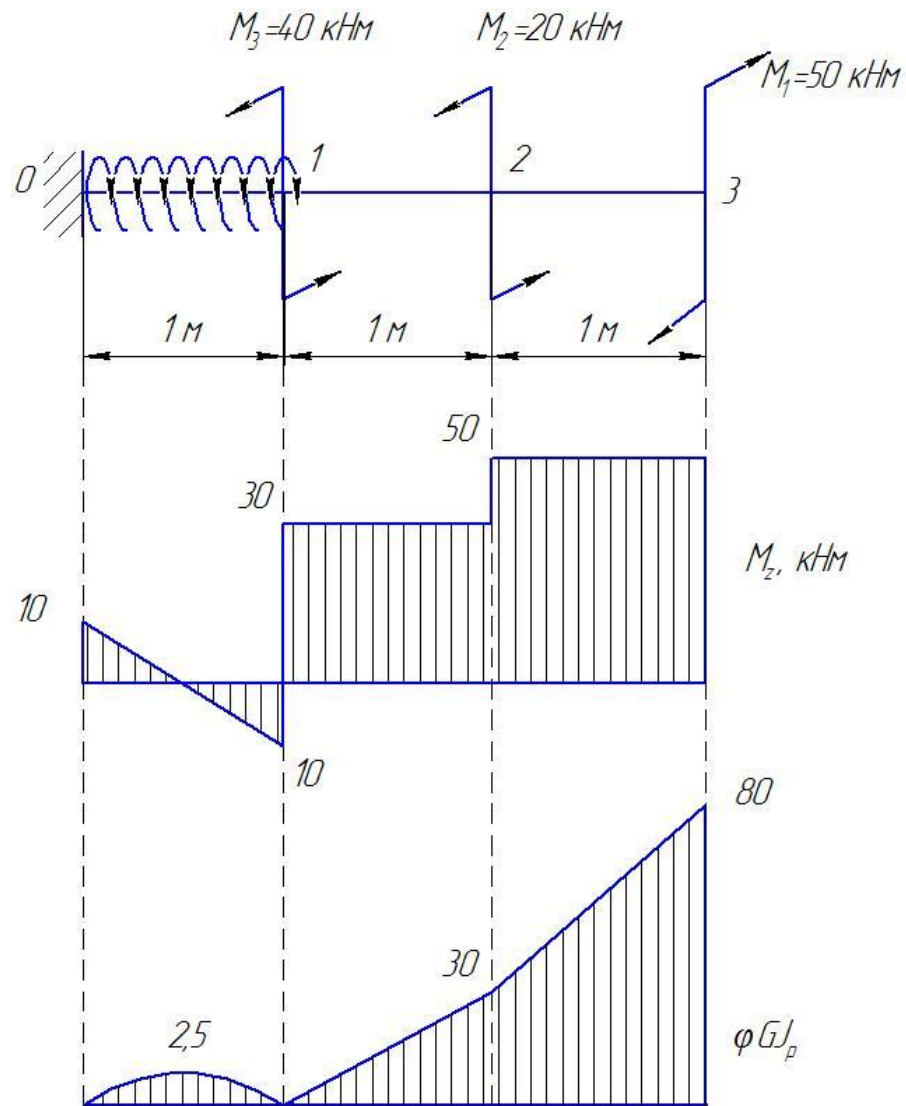
откуда, учитывая, что $\varphi = \int_l \Theta dz$, а также формулу (6.5), найдем

потенциальную энергию деформации при кручении:

$$I = \frac{1}{2} M_z \int_l \frac{M_z}{GJ_p} dz = \int_l \frac{M_z^2}{2GJ_p} dz,$$

Задача 1.

Для стержня, жестко зашпемленного одним концом, подобрать диаметр поперечного сечения из условий прочности и жесткости, если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau]=100$ МПа, модуль сдвига $G=8 \cdot 10^4$ Мпа, допускаемый угол закручивания $[\Theta]=1$ град/м.



Для определения положения опасного сечения построим эпюру внутреннего крутящего момента M_z от внешних нагрузок.

Условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} = \frac{16M_z^{\max}}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

откуда необходимый диаметр

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_z^{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50 \text{ кНм}}{\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,136 \text{ м.}$$

Построим эпюру абсолютных углов закручивания по характерным сечениям:

$$\varphi(0,5m) = \int_0^{0,5} \frac{(0 - 20z) dz}{GJ_p} = \frac{(0z - 20z^2)}{GJ_p} \Big|_0^{0,5} = \frac{2.5}{GJ_p},$$

$$\varphi(1-0) = \frac{(0z - 20z^2)}{GJ_p} \Big|_0^1 = 0,$$

$$\varphi(2-0) = \varphi_{1-0} + \varphi_{2-1} = 0 + \frac{30 \cdot 1}{GJ_p} = \frac{30}{GJ_p},$$

$$\varphi(3-0) = \varphi_{1-0} + \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} = \frac{30}{GJ_p} + \frac{50 \cdot 1}{GJ_p} = \frac{80}{GJ_p}.$$

Максимальный относительный угол закручивания

$$\Theta_{\max} = \frac{\varphi_{\max}}{L} = \frac{80 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot 32}{3 \text{ м} \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot \text{кН} / \text{м}^2 \cdot 3,14 \cdot 13,6^4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} =$$

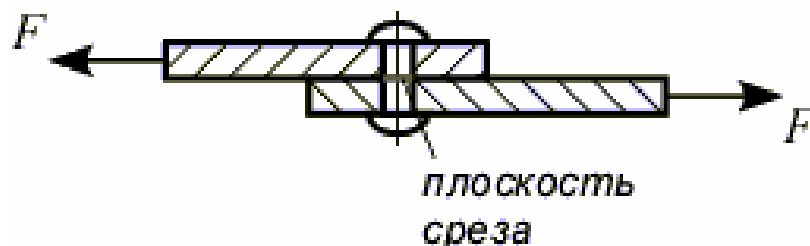
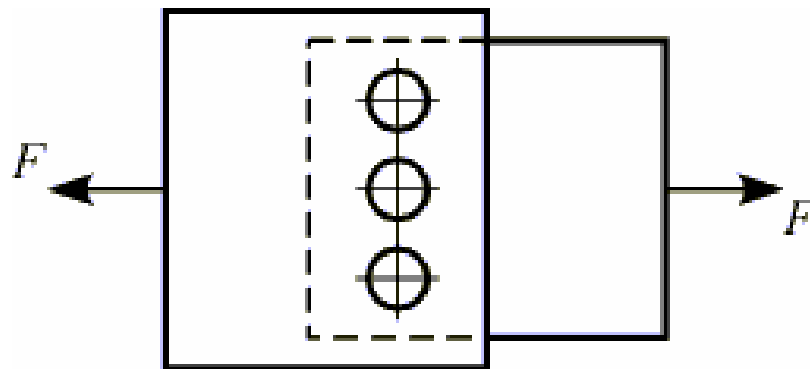
$$= 0,01 \text{ рад} / \text{м} = 0,57 \text{ град} / \text{м}.$$

это меньше, чем $[\Theta] = 1 \text{ град} / \text{м}$, т.е. условие жесткости выполняется.

6.4 Практические расчеты на срез и смятие

6.4.1 Расчет болтовых и заклепочных соединений

Соединить друг с другом два листа можно, используя шов из заклепок. При этом сама заклепка работает на срез:



Учитывая, что в момент среза касательные напряжения равномерно распределены по сечению, условие прочности на срез можно записать:

$$\tau_{cp} = \frac{F_{cp}}{A_{cp}} \leq [\tau]_{cp}$$

где площадь среза определяется по формуле:

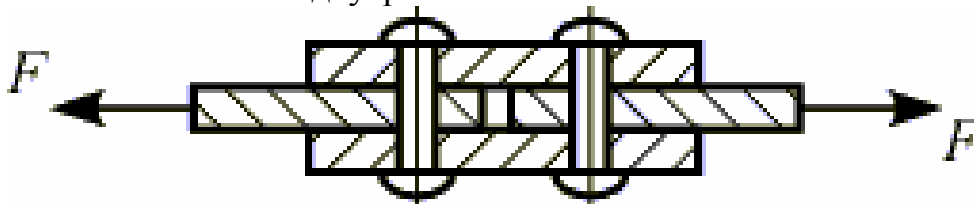
$$A_{cp} = \frac{\pi d_z^2}{4} i m$$

где i – число заклепок в шве,

d_z – диаметр заклепки.

m – количество плоскостей среза.

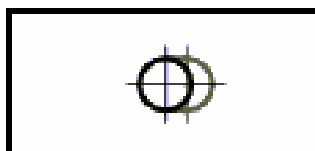
При использовании т.н. двусрезных заклепок $m=2$:



Допускаемое напряжение на срез составляет

$$[\tau]_{cp} = 0,25 - 0,35 \sigma_T.$$

Разрушение заклепочных соединений возможно также при смятии стенок отверстия под заклепку:



Расчет на смятие производится по формуле:

$$\sigma_{CM} = \frac{F}{A_{CM}} \leq [\sigma]_{CM}.$$

в которой площадь смятия может быть определена:

$$A_{CM} = \delta d_3 i,$$

где δ – толщина листа.

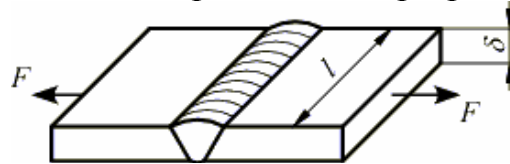
Для малоуглеродистых сталей допускаемое напряжение на смятие $[\sigma]_{CM}=100/110$ МПа, для среднеуглеродистых сталей $[\sigma]_{CM}=140/170$ МПа.

Аналогично заклепочным рассчитываются болтовые соединения. Рассмотренные формулы можно использовать также для шпоночных и шлицевых соединений.

6.4.2 Сварные соединения

Соединение двух листов может быть выполнено с помощью сварки.

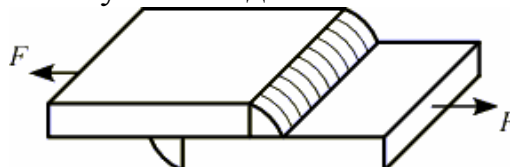
Стыковые сварные соединения работают на разрыв:



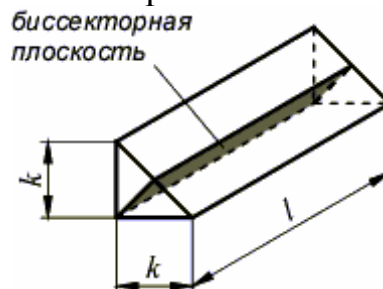
Условие прочности:

$$\sigma_p = \frac{F_{CP}}{l\delta} \leq [\sigma].$$

Кроме стыковых, используется соединение листов внахлест:



Такие соединения работают на срез по биссекторной плоскости:



Условие прочности:

$$\tau_{CP} = \frac{F_{CP}}{0.7kl} \leq [\tau].$$

где k – катет шва.

