

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образова-
тельное учреждение высшего образования
«Ивановский государственный политехнический
университет»

Кафедра мехатроники и радиоэлектроники

Кафедра мехатроники и радиоэлектроники

Е.А.Топорова

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Учебно - методическое пособие
для выполнения расчётно-графической работы по дисциплине
«Теоретическая механика» для
студентов направления подготовки

23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Иваново 2026

УДК 621

Е.А. Топорова Кинематический анализ плоского рычажного механизма. Учебно-методическое пособие. - Иваново: ФГБОУ ИВГПУ, 2026. - 80 с.

Даны теоретические основы и примеры кинематического анализа многозвенных плоских механизмов с одной степенью свободы. Предназначено для студентов направления подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Одобрено и рекомендовано к публикации на заседании кафедры мехатроники и радиоэлектроники

Печатается по решению

Рецензенты:

©ИВГПУ, 2026

Оглавление

Предисловие	4
1. Кинематика точки и твёрдого тела	6
1.1. Основные положения кинематики точки	6
1.1.1. Три способа задания движения точки	6
1.1.2. Определение скоростей и ускорений	9
1.2. Основные положения кинематики твёрдого тела	17
1.2.1. Простейшие движения твердого тела	17
1.2.2. Плоскопараллельное движение твёрдого тела	25
1.2.3. Основные положения теории сложных движений точки	33
2. Общие сведения о механизмах. Основы кинематического расчёта плоских рычажных механизмов	36
2.1. Общие сведения о механизмах	36
2.2. Основные принципы построения планов механизмов	39
2.3. Основные принципы определения кинематических характеристик при помощи графических методов	40
2.4. Основные принципы определения кинематических характеристик при помощи аналитических методов	44
3. Пример кинематического анализа плоского многозвенного механизма с одной степенью свободы	47
3.1. Построение плана механизма	47
3.2. Построение плана скоростей	49
3.3. Определение мгновенных угловых скоростей звеньев механизма с помощью плана скоростей	54
3.4. Построение плана ускорений для звена АВ механизма и определение его углового ускорения при помощи плана ускорений	55
3.5. Определение скоростей точек плоского многозвенного рычажного механизма методом мгновенных центров скоростей (МЦС)	60
3.6. Расчёт относительных погрешностей линейных и угловых скоростей, определенных разными методами	64
3.7. Определение ускорений точек и углового ускорения шатуна АВ аналитическим методом	65
3.8. Расчёт относительных погрешностей ускорений точек и углового ускорения шатуна АВ, определенных разными методами	69
4. Варианты заданий для кинематического анализа плоского многозвенного механизма с одной степенью свободы	70
5. Список литературы	79

Предисловие

Кинематика – это раздел теоретической механики, который даёт представление о различных кинематических характеристиках твёрдых тел, а также соотношениях между ними.

Кинематика изучает изменения в положении тел по отношению к системе отсчёта. Она даёт возможность разобраться в многообразии видов механического движения и установить пространственные и временные меры движения (путь, скорость и т.п.).

Ограниченное количество лекционных и практических часов по механике для курсантов не позволяет приобрести достаточные для специалиста знания, которые являются основой большинства инженерных расчётов.

Поэтому приобретение, восполнение и закрепление знаний в данной сфере, как и любой другой, является важной задачей на этапе формирования инженерного мышления курсантов.

Цель учебно - методического пособия – научить курсантов производить кинематический анализ плоских многосвязных механизмов и тем самым сформировать чёткое представление о физическом смысле, закономерностях изменений и соотношений между различными кинематическими характеристиками твёрдого тела и его точек при различных видах движения, методах и средствах расчёта плоских многосвязных механизмов.

Учебно - методическое пособие может оказывать помощь в изучении:

1. Основных положений кинематики точки как основополагающих понятий при рассмотрении следующих пунктов:
 - 1.1. Изучении способов задания движения точки;
 - 1.2. Изучении понятий скорости и ускорения точки при различных способах задания движения точки.
2. Основных положений кинематики твёрдого тела как необходимых условий для проведения успешного расчёта плоского многосвязного механизма:

- 2.1. Изучении простейших видов движений твердого тела и кинематических характеристик твёрдого тела и его точек.
- 2.2. Изучении особенностей плоскопараллельного движения и принципов определения кинематических характеристик при плоскопараллельном движении.
3. Принципов определения положения точек и звеньев многозвенного механизма на плоскости для формирования представления о работе механизмов такого типа.
4. Принципов определения кинематических характеристик точек и звеньев плоского многозвенного механизма с одной степенью свободы.
5. Принципов графического метода определения кинематических характеристик точек механизма, а также изучения принципов определения угловых характеристик звеньев механизма.
6. Принципов графо-аналитического метода определения кинематических характеристик точек механизма, а также изучения принципов определения угловых характеристик звеньев механизма этим методом и ведения сравнительного анализа двух методов.

Учебно - методическое пособие направлено на то, чтобы научить:

1. Применить всё вышеизложенное на практике к конкретному механизму.
2. Делать выводы о закономерностях изменений и соотношений между различными кинематическими характеристиками на основе проведённого анализа плоского многозвенного механизма.

Практическая ценность работы заключается в приобретении, восполнении и закреплении знаний курсантами по механике в разделах «Кинематика» и «Теория машин и механизмов» посредством выполнения самостоятельной расчётно-графической работы по анализу плоских многозвенных механизмов, являющейся важнейшей задачей при формировании инженерного мышления курсантов.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

1.1. Основные положения кинематики точки

1.1.1. Три способа задания движения точки

Естественный способ задания движения точки

Движущаяся точка в различные мгновения занимает различные положения относительно системы отсчёта. Геометрическое место всех последовательных положений движущейся точки относительно данной системы отсчёта называют *траекторией точки (траекторией)*.

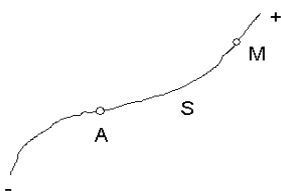


Рис.1. Естественный способ задания движения

Движение точки называют прямолинейным, если траектория – прямая линия, и криволинейным, если траектория отлична от прямой. В этом случае она может быть плоской и пространственной.

Если точка движется по некоторой траектории и в данное мгновение занимает положение M (рис.1), то положение точки M известно, если дано её расстояние $S = AM$ (измеренное по траектории) от точки A , принятой за начало отсчёта. Положительным считается расстояние по одну сторону от точки A , а отрицательным – по другую.

Расстояние S с течением времени изменяется, оно является функцией времени:

$$S = S(t) \quad (1.1)$$

Функция (1.1) должна быть однозначна, непрерывна и дважды дифференцируема.

Функцию $S(t)$ называют *кинематическим уравнением движения* точки по траектории или *законом движения*. Движение точки задано, если положение точки может быть определено в любое мгновение. Чтобы охарактеризовать изменение поло-

жения точки на траектории в любое мгновение, введём понятие алгебраической величины скорости точки.

Пусть в момент времени t_l точка M занимает положение S_l . Через промежуток времени Δt положение точки изменится на величину ΔS , которую назовём приращением расстояния точки M за время Δt . Тогда

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t). \quad (1.2)$$

Отношение приращения расстояния точки к соответствующему промежутку времени называют *средней скоростью точки*:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Если уменьшать промежуток времени, оставляя неизменным начало этого промежутка, то это отношение (1.3) будет стремиться к некоторому пределу, называемому *алгебраической скоростью* точки:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

В правой части уравнения (1.4) имеем производную от расстояния по времени.

Таким образом, алгебраическая величина скорости характеризует изменение положения точки на её траектории в данное мгновение и выражается первой производной от расстояния по времени:

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.5)$$

Из дифференциального исчисления известно, что если dS/dt имеет знак «+», то расстояние возрастает и точка M движется по траектории в том направлении, которое принято за положительное при отсчёте расстояний S . При отрицательном значении dS/dt точка M будет двигаться в обратную сторону.

Координатный способ задания движения точки

Координаты движущейся точки являются непрерывными функциями времени:

$$\begin{aligned} X &= f_1(t), \\ Y &= f_2(t), \\ Z &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

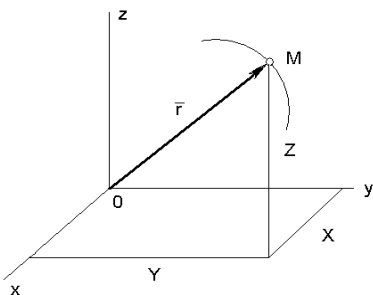


Рис. 2. Движение точки в декартовой системе координат

Уравнения (1.6) называют уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах. По ним легко определить уравнения траектории точки в декартовых координатах. Для этого из уравнений (1.6) нужно исключить время.

В итоге получим функции вида

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, z) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Функции F_1 и F_2 являются уравнениями траектории в декартовых координатах. На плоскости уравнение траектории точки примет вид

$$F(x, y) = 0. \quad (1.8)$$

Векторный способ задания движения точки

Положение точки $M(x, y, z)$ (рис. 2) определяется радиус-вектором $\vec{r}$ относительно начала координат O . При движении точки её радиус-вектор $\vec{r}$ меняет величину и направление и, следовательно, является функцией времени.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) называют векторным уравнением движения точки. Если известны уравнения (1.7), то легко получить уравнение (1.9).

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad , \quad (1.10)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты координатных осей.

$$\bar{r} = f_1(t) \bar{i} + f_2(t) \bar{j} + f_3(t) \bar{k} \quad . \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) – векторное уравнение движения точки M .

1.1.2. Определение скоростей и ускорений

Определение скорости при векторном и координатном способах задания движения точки

Если положение точки M в момент времени t определяется радиус-вектором $\bar{r}$ (рис.3), а в момент времени $t + \Delta t$ – радиус-вектором $\bar{r} + \Delta \bar{r}$, то отношение приращения $\Delta \bar{r}$ к Δt есть средняя скорость т. M . Средняя векторная скорость $\bar{V}_{\text{ср}}$ направлена по секущей MM_1 .

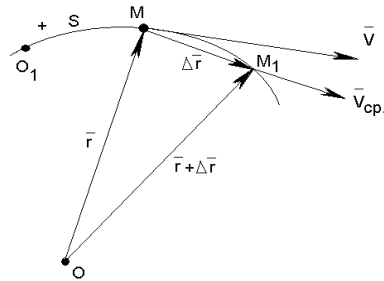


Рис. 3. Средняя и истинная скорости точки

$$\bar{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad . \quad (1.12)$$

Если промежуток времени Δt стремится к нулю, то в пределе секущая MM_I является направлением касательной, следовательно,

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1.13)$$

Итак, *вектор скорости точки равен первой производной по времени радиус-вектора точки и направлен по касательной к траектории в сторону движения.*

Если движение точки задано координатным способом, т.е. уравнениями (1.6), векторная форма записи которых будет представляться уравнением (1.11), то, продифференцировав по времени уравнение (1.11), получим

$$\bar{V} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \quad (1.14)$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – производные по времени от каждой из координат, следовательно,

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}. \quad (1.15)$$

Итак, *проекции скорости точки на оси координат равны первым производным соответствующих координат точки по времени.*

Тогда модуль скорости точки определится следующим образом:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (1.16)$$

а направления вектора скорости определяют направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{V_x}{V}, \\ \cos \beta &= \frac{V_y}{V}, \\ \cos \gamma &= \frac{V_z}{V}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где α, β и γ – углы вектора скорости с осями координат.

Определение вектора скорости при естественном задании движения точки

Выше говорилось об алгебраической величине скорости при естественном задании движения точки, однако скорость – величина векторная, поэтому, если движение задано естественным способом, необходимо определять направление скорости.

Умножим и разделим выражение (1.13) на дифференциал дуги траектории ds . Имеем

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Очевидно, что $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$ как предел отношения бесконечно малой дуги к стягивающей её хорде. Вектор $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ направлен по хорде в сторону увеличения s . Следовательно

но, вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ как предел $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ направлен по касательной к траектории точки в сторону увеличения s , т.е. в положительном направлении отсчёта расстояний и не зависит от направления

движения точки. Введём единичный вектор $\bar{\tau}$, равный $\frac{d\bar{r}}{ds}$. Тогда для скорости точки получим

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}. \quad (1.18)$$

Скалярная величина $\dot{S} = V_{\tau} = \frac{ds}{dt}$ есть проекция вектора скорости точки на касательную к её траектории. Она и будет являться алгебраической скоростью точки. Положительное направление на касательной определяется вектором $\bar{\tau}$, ориен-

тированным, как уже известно, в положительном направлении отсчёта расстояний. В итоге получим

$$\bar{V} = V_{\tau} \bar{\tau}. \quad (1.19)$$

Определение ускорений при векторном, координатном и естественном способах задания движения точки

А. Определение ускорения при векторном и координатном способах задания движения точки.

Среднее и истинное ускорения точки.

Рассмотрим два момента времени t и $t + \Delta t$ (рис. 4).

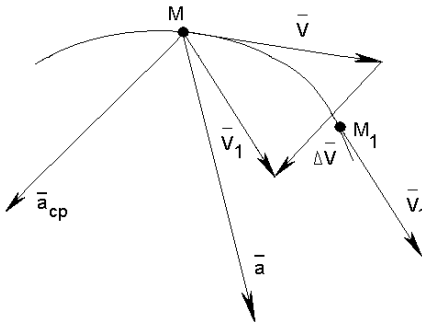


Рис. 4. Среднее и истинное ускорения точки

В моменты времени t и $t + \Delta t$ точка занимает положения M и M_1 и имеет скорости $\bar{V}$ и $\bar{V}_1$ соответственно. За промежуток времени Δt скорость точки M изменилась на некоторую величину $\Delta \bar{V}$, что определяется векторной разностью векторов $\bar{V}$ и $\bar{V}_1$.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta \bar{V}$ к промежутку времени Δt называют средним ускорением за промежуток времени Δt .

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор скорости точки изменится на предельно малую величину $d\bar{V}$. В итоге получим истинное ускорение точки M :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}. \quad (1.21)$$

Поскольку вектор скорости есть первая производная радиус-вектора точки по времени, то

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (1.22)$$

Таким образом, *вектор ускорения точки равен первой производной вектора скорости точки по времени и второй производной радиус-вектора точки по времени.*

При определении ускорения учтено изменение скорости как по величине, так и по направлению, поэтому его часто называют *полным ускорением* точки.

Определим, как направлен вектор полного ускорения по отношению к траектории точки. Вектор $\bar{a}_{cp}$, имея направление вектора $\Delta\bar{V}$, всегда направлен в сторону вогнутости траектории. Это относится и к предельному случаю вектора $\bar{a}_{cp}$, т.е. вектору ускорения $\bar{a}$. В случае если траекторией является плоская кривая, вектор ускорения $\bar{a}$ лежит в плоскости этой кривой. Если же траектория – пространственная кривая, то вектор $\bar{a}_{cp}$ будет лежать в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 . В пределе, когда точка M_1 стремится к точке M , эта плоскость занимает положение *соприкасающейся плоскости*, положение которой может быть найдено как предельное положение плоскости, проведённой через точки M , M_1 и M_2 , когда точки M_1 и M_2 стремятся к M . Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой.

Ускорение в прямоугольных декартовых координатах

Если движение точки задано в прямоугольных декартовых координатах, т.е. выражениями (1.6), то полное ускорение точки можно определить, применив формулу (1.21). Имеем

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}.$$

Дифференцируя два раза по времени радиус-вектор точки, получим

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \bar{k}, \quad (1.23)$$

где $\frac{d^2 x}{dt^2} = a_x$; $\frac{d^2 y}{dt^2} = a_y$; $\frac{d^2 z}{dt^2} = a_z$ – проекции вектора ускорения $\bar{a}$ на оси координат.

Таким образом, *проекции вектора ускорения точки на оси координат равны вторым производным соответствующих координат точки по времени.* По проекциям определяется величина и направление вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.24)$$

Направляющие косинусы определяются следующим образом:

$$\cos \alpha_1 = a_x / a; \quad \cos \beta_1 = a_y / a; \quad \cos \gamma_1 = a_z / a. \quad (1.25)$$

Б. Определение ускорения при задании движения точки естественным способом.

При естественном способе задания движения вектор ускорения $\bar{a}$ определяют по его проекциям на оси естественного трёхгранника $Mtnb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней.

Ось τ (касательная) направлена вдоль касательной к траектории в положительном направлении отсчёта расстояния s . Ось n (главная нормаль) – по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости в сторону вогнутости траектории. Ось b (бинормаль) – перпендикулярно первым двум осям, образуя с ними правую тройку.

Выше было показано, что ускорение точки $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Следовательно, проекция его на бинормаль равна нулю.

Вычислим проекции ускорения на оси τ и n .

Продифференцируем по времени выражение (1.19):

$$\bar{V} = V_{\tau} \bar{\tau}.$$

Получим

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + s^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds}, \quad (1.26)$$

где ds – дифференциал дуги траектории.

Для того чтобы найти производную $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, воспользуемся формулой дифференцирования вектора постоянного модуля по скалярному аргументу:

$$\frac{d\bar{b}}{du} = b \frac{d\varphi}{du} \bar{n}, \quad (1.27)$$

где $\bar{b}$ – дифференцируемый вектор; u – скалярная переменная величина; φ – угол поворота вектора $\bar{b}$; $d\varphi$ – бесконечно малый угол поворота вектора $\bar{b}$ (угол АОВ, рис. 5); $\bar{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный к дифференцируемому вектору и направленный в сторону увеличения угла поворота.

Таким образом, про-

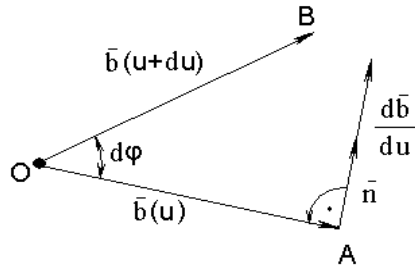


Рис. 5. Производная вектора постоянного модуля по скалярному аргументу

изводная $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ будет равна

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \tau \frac{d\varphi}{ds} \bar{n} , \quad (1.28)$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный вектору $\bar{\tau}$ и, следовательно, направленный по какой-то нормали к траектории.

Величина $\frac{d\varphi}{ds}$, т.е. предел отношения угла поворота касательной к длине дуги кривой, есть кривизна кривой в данной точке или величина, обратная радиусу кривизны кривой в этой точке:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} . \quad (1.29)$$

В результате получим

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n} . \quad (1.30)$$

Правая часть выражения (1.30) представляет собой сумму двух векторов, один из которых направлен по касательной к траектории в данной точке, поэтому находящийся в соприкасающейся плоскости. Другой из векторов находится также в соприкасающейся плоскости, поскольку левая часть данного выражения есть полное ускорение точки, которое лежит в соприкасающейся плоскости. Следовательно, вектор $\frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}$ направлен по главной нормали.

Выражение (1.30) перепишем через скорости. Получим

$$\bar{a} = \frac{dV_{\bar{\tau}}}{dt} \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n} . \quad (1.31)$$

Первое слагаемое в правой части носит название *касательного ускорения* точки. Второе слагаемое – это *нормальное ускорение* точки.

Таким образом, полное ускорение точки представляет собой геометрическую сумму двух взаимоперпендикулярных составляющих – касательной и нормальной, каждая из которых проецируется соответственно только на касательную и только на главную нормаль к траектории в данной точке. Проекция полного ускорения на бинормаль равна нулю.

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине и может быть положительным, если модуль скорости растёт, и отрицательным, если модуль скорости уменьшается.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению, оно направлено в сторону вогнутости траектории и всегда положительно.

Если движение равномерное (скорость по модулю постоянна), то касательное ускорение обращается в ноль и тогда

$$\bar{a} = \frac{V^2}{\rho} \bar{n}. \quad (1.32)$$

Если же траектория точки прямая (радиус кривизны ρ равен бесконечности), то нормальное ускорение равно нулю:

$$\bar{a} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \bar{\tau}. \quad (1.33)$$

1.2. Основные положения кинематики твердого тела

1.2.1. Простейшие движения твердого тела

В кинематике, как и в статике, все тела считаются абсолютно твёрдыми, т.е. расстояния между двумя любыми точками тела неизменны.

Задачами кинематики твёрдого тела являются:

- задание движения и изучение кинематических характеристик движения всего тела в целом;
- изучение движения каждой из точек тела в отдельности.

Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным движением твёрдого тела называют такое движение, при котором любая прямая в теле перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному положению.

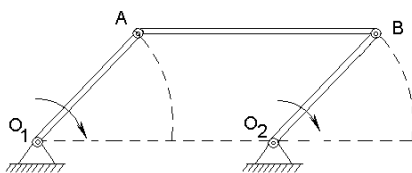


Рис. 6. Движение спарника

При поступательном движении твёрдого тела точки тела могут двигаться по любым траекториям. Типичными примерами поступательного движения являются движение поршня в цилиндре, например двигателя

внутреннего сгорания, движение зубчатых реек дерево- и металлообрабатывающего оборудования, кузова автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке пути или спарника AB шарнирного параллелограмма AO_1O_2B (рис. 6).

При вращении кривошипов O_1A и O_2B , где обязательным условием является их равенство по длине, звено AB движется поступательно. В любой момент времени прямая AB остаётся параллельной своему первоначальному состоянию. Причём спарник AB может иметь совершенно различную форму. Но, независимо от этого, прямые, принадлежащие этому телу, будут при движении оставаться параллельными самим себе. Механизмы такого типа часто используются в различных областях техники.

Необходимым условием поступательного движения является равенство скоростей и ускорений всех точек тела. Для спарника

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B \text{ и } \vec{a}_A = \vec{a}_B. \quad (1.34)$$

Равенство скоростей и ускорений не является достаточным условием для поступательного движения. При поступательном движении скорости и ускорения изменяются на одну и ту же величину и опять остаются равными. Но может оказаться, что в один момент времени скорости точек тела равны, а в следующий – уже различны. Тогда следует говорить о *мгновенном поступательном движении*. Такой вид движения часто встречается

ся при рассмотрении работы плоских кривошипно-шатунных и кривошипно-ползунных механизмов.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются неподвижными. Прямая, проходящая через две данные точки, называется осью вращения. Прямая OO_1 (рис.7) – ось вращения тела D . Рассмотрим две полуплоскости: неподвижную N и P , неизменно связанную с телом D и, следовательно, вращающуюся вместе с ним.

Тогда положение полуплоскости P (или тела D) определится двугранным углом φ между подвижной и неподвижной полуплоскостями. Этот угол называется *углом поворота* тела.

Угол поворота φ считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси вращения поворот полуплоскости P к полуплоскости N представляется против хода часовой стрелки. Угол поворота φ имеет знак минус, если данное движение представляется по ходу часовой стрелки.

Угол поворота является непрерывной функцией времени:

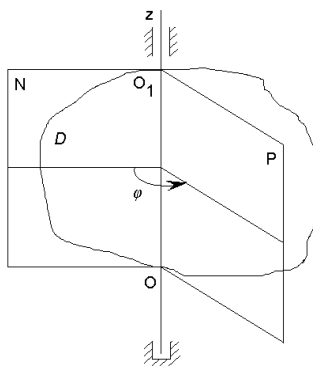


Рис. 7. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

$$\varphi = f(t). \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) носит название уравнения вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Угол поворота измеряется, как правило, в радианах.

При вращении тела вокруг неподвижной оси точки тела описывают окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и с центрами в ней.

Примером вращательного движения вокруг неподвижной оси может служить движение маховиков различных машин, зубчатых колёс на неподвижных валах, кривошипов в кривошипно-шатунных и кривошипно-ползунных механизмах и т.д.

Угловая скорость и угловое ускорение твёрдого тела

Уравнение (1.35) даёт возможность определить угол поворота φ в момент времени t . В следующий момент времени угол поворота изменится на некоторую величину $\Delta\varphi$.

Средней алгебраической угловой скоростью будет являться величина, равная отношению приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к тому промежутку времени, за который произошло изменение угла поворота:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1.36)$$

Если промежуток времени стремится к нулю, то в пределе получим истинную угловую скорость:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.37)$$

Таким образом, *алгебраическая угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени.*

Очевидно, что величина угловой скорости (алгебраическая угловая скорость) положительна, если вращение при взгляде с положительного направления оси происходит против хода часовой стрелки (функция $\varphi = f(t)$ – возрастает), и отрицательна, если вращение также при взгляде с положительного направления оси происходит по ходу часовой стрелки (функция $\varphi = f(t)$ – убывает).

Угловую скорость можно представить и в виде вектора $\vec{\omega}$, численно равного $\frac{d\varphi}{dt}$ и направленного вдоль оси вращения в ту

сторону, откуда вращение представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Угловая скорость показывает, как быстро изменяется угол поворота с течением времени. Она измеряется в радианах в секунду (рад/с) или в единицах, обратных единице времени (с^{-1}).

Существует связь между величиной угловой скорости и частотой вращения n твёрдого тела, измеряемой в оборотах в минуту (об/мин).

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (1.38)$$

Угловое ускорение есть величина, характеризующая изменение угловой скорости во времени.

Зная угловую скорость ω для момента времени t и угловую скорость $\omega + \Delta\omega$ для момента времени $t + \Delta t$, можно определить *среднюю величину углового ускорения (алгебраическое угловое ускорение) тела за промежуток времени Δt* :

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (1.39)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим истинное угловое ускорение тела:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.40)$$

Итак, *алгебраическое угловое ускорение тела равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла поворота тела по времени.*

Алгебраическое угловое ускорение положительно, если угловая скорость возрастает (вращение ускоренное), и отрицательно, – если убывает (вращение замедленное).

Очевидно, что вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Это следует из выражения производной от вектора угловой скорости:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi} \bar{k}. \quad (1.41)$$

При этом вектор $\bar{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\bar{\omega}$, когда тело вращается ускоренно, и направлен в сторону, противоположную $\bar{\omega}$, когда вращение замедленное (рис. 8).

Единицей измерения углового ускорения является радиан на секунду в квадрате ($\text{рад}/\text{с}^2$) или секунда в минус второй степени (с^{-2}).

Если угловая скорость тела постоянна во времени ($\omega = \text{const}$), то вращение называют *равномерным*. При этом справедливо следующее выражение:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1.42)$$

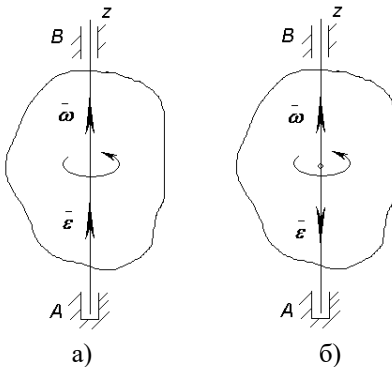


Рис. 8. Векторы угловой скорости и углового ускорения:

а – при ускоренном вращении;

б – при замедленном вращении

где φ – текущее значение угла поворота, рад ; φ_0 – угол поворота тела в начальный момент времени, рад ; ω – угловая скорость, с^{-1} ; t – текущее значение времени, с

Если угловое ускорение постоянно во времени ($\varepsilon = \text{const}$), то движение носит название *равнопеременного вращения*. При этом справедливы следующие выражения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1.43)$$

где ω – текущее значение угловой скорости, с^{-1} ; ω_0 – угловая скорость в начальный момент времени, с^{-1} ;

ε – угловое ускорение, с^{-2} .

Связь между угловыми и линейными кинематическими характеристиками при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Из вышеизложенного становится ясно, что угловые показатели $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ характеризуют движение всего тела в целом, и никак не описывают перемещение каждой его точки в отдельности, что призваны сделать линейные кинематические характеристики $\bar{V}$ и $\bar{a}$ при вращении. Надо отметить, что понятие «линейные» имеет смысл только при тех видах движения, где есть вращение в составе более сложных видов.

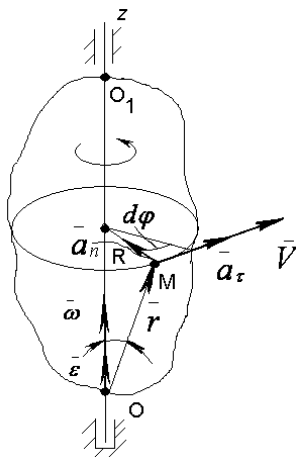


Рис. 9. Линейные и угловые кинематические характеристики при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим точку M твёрдого тела (рис. 9), определяемую радиус-вектором $\bar{r}$ и находящуюся на расстоянии R от оси вращения z .

Траектория точки M представляет собой окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения с центром на этой оси. При повороте тела на угол $d\varphi$ за бесконечно малое время dt произойдёт бесконечно малое перемещение ds точки M вдоль своей траектории:

$$ds = R \cdot d\varphi.$$

Тогда модуль линейной скорости точки определится как

$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (1.44)$$

Из рис. 9 видно, что $R = r \sin \beta$. Умножив на ω обе части уравнения, получим $R\omega = r\omega \sin \beta$. Следовательно,

$$V = |\bar{\omega} \times \bar{r}| \quad \text{и} \quad \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (1.45)$$

Таким образом, *вектор линейной скорости точки вращающегося твёрдого тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор точки при полюсе, взятом на оси вращения.*

По определению векторного произведения вектор линейной скорости расположен на перпендикуляре к плоскости двух векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ и всегда будет направлен в сторону вращения тела, что подтверждается правилом определения направления вектора-произведения данных векторов.

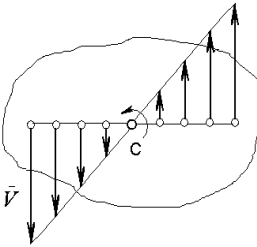


Рис. 10. Распределение скоростей точек твёрдого тела

Линейная скорость точки вращающегося твёрдого тела ещё носит название *окружной скорости*.

В проекции на плоскость распределение линейных скоростей точек тела выглядит, как показано на рис. 10.

Из формулы (1.44) очевидно, что линейные скорости точек пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

Определим вектор полного ускорения точки M как производную вектора скорости точки по времени. Для этого продифференцируем выражение (1.45) как произведение. В итоге получим

$$\bar{a} = \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \bar{V} \right). \quad (1.46)$$

Раскрыв первое слагаемое данной векторной суммы, получим

$$|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon R. \quad (1.47)$$

Нетрудно понять, что вектор с модулем ωR будет расположен вдоль касательной к траектории точки, т.е. будет либо сонаправлен с вектором скорости, либо направлен в сторону, противоположную ему. Следовательно, этот вектор есть касательное ускорение точки M :

$$a_\tau = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}|. \quad (1.48)$$

Рассмотрим второе слагаемое выражения (1.46). Его модуль будет равен

$$|\vec{\omega} \times \vec{V}| = \omega V \sin 90^\circ = \omega^2 R. \quad (1.49)$$

В соответствии с правилом векторного произведения, вектор с модулем $\omega^2 R$ направлен по радиусу окружности к её центру. Значит, этот вектор есть вектор нормального ускорения точки M :

$$a_n = |\vec{\omega} \times \vec{V}|. \quad (1.50)$$

Окончательно получаем

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.51)$$

Итак, *при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси, полное ускорение равно геометрической сумме двух взаимоперпендикулярных составляющих ускорения – тангенциальной и нормальной.*

1.2.2. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным или плоским называется такое движение твёрдого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Плоскопараллельное движение совершают большинство машин и механизмов, используемых в технике. Примерами плоскопараллельного движения могут служить качение колеса автомобиля на прямолинейном участке пути, движение шестерён зубчато-рычажных механизмов, колёс-сателлитов планетарных механизмов, шатунов кривошипно-шатунных механизмов.

Если твёрдое тело (рис. 11) совершает плоское движение,

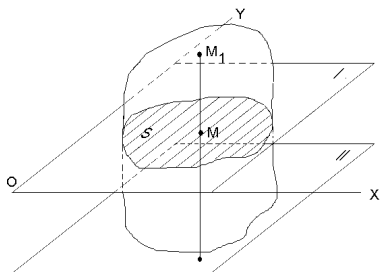


Рис. 11. Плоскопараллельное движение

то для изучения такого вида движения необходимо и достаточно рассмотреть движение плоской фигуры (сечения S) в её плоскости I, параллельной неподвижной плоскости II, поскольку в этом случае все точки прямой MM_1 и любой другой

прямой, перпендикулярной плоскости I, движутся одинаково.

При рассмотрении плоского движения плоскость XOY совмещается, как правило, с плоскостью рисунка.

Уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела

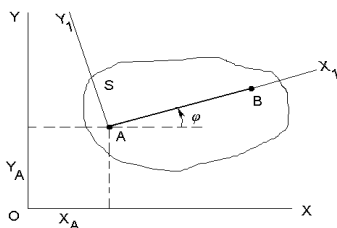


Рис. 12. Определение положения плоской фигуры относительно неподвижной системы координат XOY

При решении задач механики целесообразно, а иногда и необходимо рассматривать движение точки (или тела) одновременно к двум системам отсчёта, одна из которых считается условно подвижной, а другая определённым образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом телом или (точкой тела), называется *составным* или *сложным*.

Примером сложного движения может являться движение человека, идущего по эскалатору. В этом случае подвижной системой отсчёта является эскалатор, а неподвижной – всё то, что находится снаружи эскалатора (стены, пол и т.д.).

Плоскопараллельное движение тела можно рассматривать так же, как составное. Для того чтобы задать положение плоской фигуры S относительно неподвижной системы координат

XOY , достаточно задать положение отрезка AB (подвижной системы координат $X_I AY_I$), неизменно связанного с этой плоской фигурой (рис. 12).

Положение отрезка AB определится координатами какой-либо точки данного отрезка, например точки A , и углом φ , образуемым этим отрезком с одной из осей координат, например осью X .

При движении тела координаты точки A и угол φ будут изменяться во времени, поэтому для текущего момента времени справедливы следующие зависимости:

$$X_A = f_1(t); \quad Y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (1.52)$$

Уравнения (1.52) называют *уравнениями плоскопараллельного движения твёрдого тела*.

Точку A , определяющую положение фигуры S , будем называть *полюсом*.

Разложение плоскопараллельного движения твёрдого тела на поступательное и вращательное движения

Как бы ни двигалось твёрдое тело, его движение всегда можно представить как составное и разложить множеством способов на два движения – *относительное и переносное*. Значит, движение плоской фигуры также можно разложить на эти две составляющие.

Относительным движением называется движение тела или точки тела по отношению к подвижной системе координат.

Переносным движением называют движение подвижной системы координат и всех неизменно связанных с нею точек.

Докажем, что плоскую фигуру можно перевести из одного положения в другое двумя перемещениями – поступательным перемещением в плоскости фигуры вместе с полюсом и поворотом фигуры относительно данного полюса в этой же плоскости. Для этого примем за переносное движение фигуры её движение вместе с поступательно движущейся системой координат $X_I AY_I$, начало которой скреплено с полюсом A . В этом случае относительным движением будет являться вращение относительно по-

движной оси, проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости фигуры.

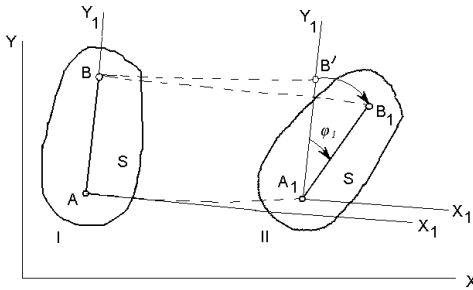


Рис. 13. Поступательное перемещение и поворот плоской фигуры

Рассмотрим два положения плоской фигуры, определяемых двумя положениями отрезка AB , неизменно связанным с этой фигурой (рис.13). Из данного рисунка можно увидеть, что сечение S движущегося тела, а вместе с ним и всё тело можно перевести из положения I в положение II сначала

поступательно вместе с полюсом A таким образом, чтобы точка A , двигаясь по своей траектории, перешла в точку A_1 , а затем вращением фигуры S относительно полюса A_1 на угол φ_1 до совпадения точки B' с точкой B_1 .

Последовательность действий может быть и другая: можно сначала повернуть плоскую фигуру относительно полюса A , а затем переместить поступательно до совпадения фигуры с положением II. Поступательное движение сечения S и постепенное вращение его в процессе этого движения таким образом, чтобы в момент совпадения точек A и A_1 угол поворота был равен φ_1 , также является одним из способов перемещения плоского тела из одного положения в другое.

В любом из этих случаев плоскопараллельное движение твёрдого тела всегда можно заменить двумя более простыми видами движения, поступательным и вращательным, так, чтобы конечное положение тела было одним и тем же.

Если мы говорим о действительном плоскопараллельном перемещении, где каждое последующее положение является бесконечно близким к предыдущему, то поступательным движением в этом случае будет переносное движение плоской фигуры, а относительным движением – вращение вокруг оси, проходящей через выбранный полюс.

Таким образом, *плоскопараллельное движение твёрдого тела состоит из переносного поступательного движения этого тела вместе с полюсом и относительного вращательного движения вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости фигуры через полюс.*

Отметим ещё одно важное обстоятельство.

Поступательное перемещение зависит от выбора точки фигуры, с которой совершается это перемещение, а вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

Угловые и линейные кинематические характеристики и их определение при плоскопараллельном движении

Основными кинематическими характеристиками плоскопараллельного движения твёрдого тела являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса, а также угловая скорость и угловое ускорение в относительном вращательном движении вокруг выбранного полюса.

Покажем, что скорость любой точки твёрдого тела, движущегося плоскопараллельно, складывается из двух скоростей, которые тело получает в каждом из двух движений – переносного поступательного и относительного вращательного.

Рассмотрим рис. 14. Здесь видно, что радиус-вектор точки M сечения S твёрдого тела равен сумме двух радиус-векторов, один из которых $\bar{r}_A$ – радиус-вектор точки A (полюса), а другой $\bar{r}_I$ – радиус-вектор точки M относительно подвижной системы координат $X_I A Y_I$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно:

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}_I. \quad (1.53)$$

Продифференцируем по времени выражение (1.53):

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_I}{dt}. \quad (1.54)$$

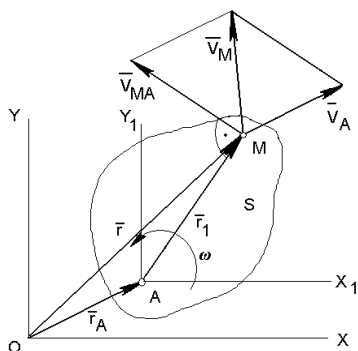


Рис. 14. Сложение скоростей при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Первое слагаемое правой части выражения (1.54) представляет собой скорость точки A (полюса), а второе – скорость точки M при $\bar{r}_A = \text{const}$. В итоге получим

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}, \quad (1.55)$$

где $\bar{V}_A$ – скорость полюса A ; $\bar{V}_{MA}$ – относительная скорость во вращательном движении тела вокруг полюса.

Таким образом, *скорость любой точки твёрдого тела, движущегося плоскопараллельно, равна геометрической сумме скорости полюса и скорости относительного движения этой точки во вращении тела вокруг данного полюса.*

Относительная скорость V_{MA} может быть рассчитана как произведение угловой скорости вращения тела ω вокруг полюса на расстояние от точки M до оси вращения, т.е. до полюса A (см. формулу 1.44):

$$V_{MA} = \omega \cdot MA. \quad (1.56)$$

Вектор $\bar{V}_{MA}$ перпендикулярен отрезку AM и направлен в сторону вращения плоской фигуры. Поэтому справедливо выражение для векторного произведения:

$$\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{MA}. \quad (1.57)$$

Понятие мгновенного центра скоростей и способы определения его положения на плоскости

При плоском движении твёрдого тела, а следовательно, при плоском движении сечения этой фигуры в её плоскости в каждый момент времени всегда имеется единственная точка данной фигуры или точка, связанная с фигурой в этот момент времени, скорость которой равна нулю. Эта точка носит название мгновенного центра скоростей (Р, МЦС).

Мгновенный центр скоростей — это точка, положение которой меняется в каждый момент времени. Если в данный момент времени скорость какой-то точки фигуры или точки, связанной с ней, равна нулю, то в следующий момент времени нулю будет равна скорость уже другой точки, т.е. мгновенный центр скоростей сместится в другую точку.

В общем случае, если известны скорости двух точек плоской фигуры S , мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 15).

Как и в случае вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси, а в проекции на плоскость — сечения данного тела вокруг неподвижной точки, линейные скорости или скорости точек при движении плоской фигуры в своей плоскости пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

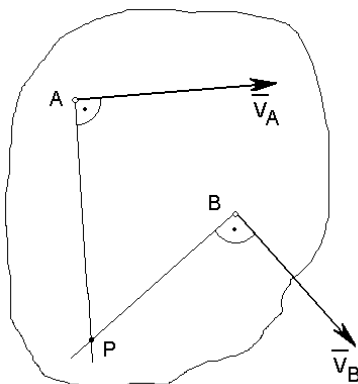


Рис. 15. Общий случай определения положения мгновенного центра скоростей

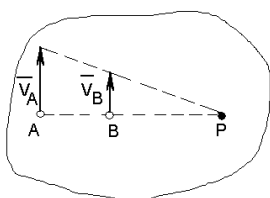
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (1.58)$$

Принципиальным отличием в определении скоростей при вращательном и при плоскопараллельном движениях является

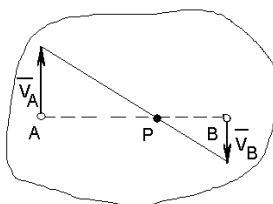
то, что во втором случае расстояния от точек до центра вращения (МЦС) есть функции времени.

Рассмотрим частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей.

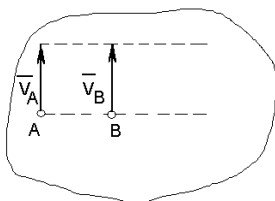
1. В случае, когда прямая, проведённая через две точки, является общим перпендикуляром к векторам скоростей, мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения данного перпендикуляра и прямой, соединяющей концы векторов скоростей (рис. 16 а, б). Если векторы скоростей сонаправлены и равны по модулю, то мгновенный центр скоростей окажется удалённым в бесконечность. В этом случае будем иметь *мгновенное поступательное движение* (рис. 16 в). При этом точки, в которых известны скорости, могут и не лежать на общем перпендикуляре к векторам скоростей (рис. 16 г).



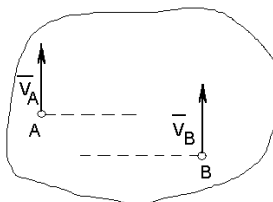
а)



б)



в)



г)

Рис. 16. Положение мгновенного центра скоростей:

а – скорости точек А и В направлены в одну сторону;

б – скорости точек А и В направлены в противоположные стороны;

в, г – скорости точек А и В равны

Решение задач с использованием мгновенного центра скоростей предполагает выполнение и обратных операций, т.е. по

известной скорости одной точки и положению мгновенного центра скоростей определяют скорость любой другой точки.

В некоторых задачах механики можно сразу определить точку, являющуюся мгновенным центром скоростей. Речь идёт о тех случаях, когда существует точка контакта данной фигуры с неподвижной поверхностью. Эта точка в каждый момент времени принадлежит одновременно двум телам – подвижному и неподвижному. Например, колесо, катящееся по плоскости (без скольжения), или шестерня планетарного механизма, катящаяся по поверхности неподвижной шестерни (рис. 17).

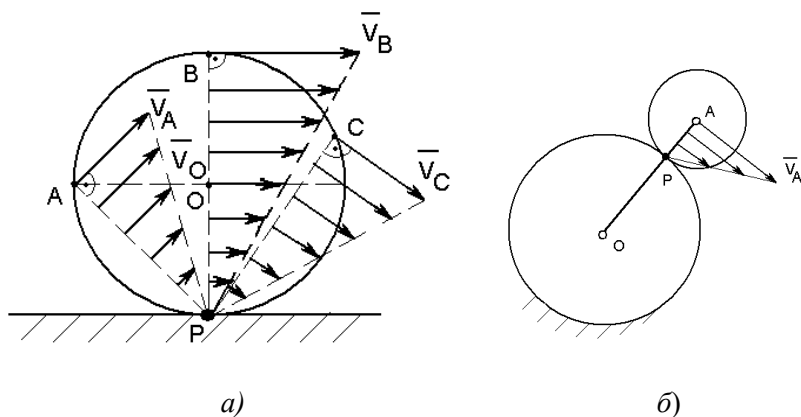


Рис. 17. Распределение скоростей:
 а – колеса на неподвижной поверхности;
 б – подвижной шестерни планетарного механизма

1.2.3. Основные положения теории сложных движений точки

Вообще *сложным* или *составным* движением точки называют движение, состоящее из нескольких движений.

Простейшим случаем сложного движения точки является её движение относительно некоторой системы координат, кото-

рая в свою очередь движется по некоторому закону в другой системе координат, условно принятой за основную.

Сложное движение точки в этом случае, так же как и движение точек тела, которое движется плоскопараллельно, будет включать в себя две составляющие: относительную и переносную. Отличие состоит в том, что при сложном движении точки в простейшем случае может существовать два как зависимых, так и независимых друг от друга движения – относительное и переносное. Причём и то и другое может быть как поступательным, так и вращательным. Если речь идёт о плоскопараллельном движении, то поскольку разделение его на два движения – искусственная операция, эти два движения всегда зависимы, т.е. без существования одного не может быть и другого, причём если одно из движений – переносное поступательное, то другое будет обязательно относительным вращательным, о чём уже было упомянуто выше.

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что движение точек тела, которое движется плоскопараллельно, есть частный случай сложного движения точки.

В плоских рычажных механизмах, которые предстоит изучить, как и во всех других механизмах, происходит преобразование одних видов движения в другие (вращательного в плоское, плоского в поступательное, поступательного во вращательное). Поэтому движения точек, принадлежащих данным механизмам, следует рассматривать как сложные их движения.

Относительной скоростью и относительным ускорением называются соответственно скорость и ускорение в относительном движении.

Понятие переносного движения относится ко всем точкам подвижной системы координат, следовательно, и к точке, имеющей относительное движение. Поэтому *переносной скоростью и переносным ускорением* называются соответственно скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает точка, имеющая относительную скорость и ускорение.

Абсолютной скоростью и ускорением точки называют соответственно её скорость и ускорение по отношению к неподвижной системе координат.

Бесконечно малый элемент абсолютной траектории точки $d\bar{r}_a$ состоит из геометрической суммы элементов относительной траектории $d\bar{r}_r$ и переносной траектории $d\bar{r}_e$:

$$d\bar{r}_a = d\bar{r}_r + d\bar{r}_e. \quad (1.59)$$

Если разделить обе части уравнения на бесконечно малый промежуток времени, то в левой части данного равенства получим абсолютную скорость точки, а в правой – сумму относительной и переносной скоростей:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e. \quad (1.60)$$

Абсолютное ускорение точки при сложном движении складывается в общем случае из трёх составляющих: относительной, переносной и третьей, называемой ускорением Кориолиса:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k. \quad (1.61)$$

Ускорение Кориолиса (поворотное ускорение) $\bar{a}_k$ характеризует изменение относительной скорости $\bar{V}_r$ в переносном движении и переносной скорости $\bar{V}_e$ в относительном движении.

Ускорение Кориолиса зависит от угловой скорости переносного движения и скорости относительного движения точки и равно их удвоенному векторному произведению:

$$\bar{a}_k = 2\left|\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r\right|. \quad (1.62)$$

Из выражения (1.62) следует, что ускорение Кориолиса равно нулю в том случае, если хотя бы одно из слагаемых равно

нулю или угол между данными векторами равен 0° . Равенство нулю угловой скорости означает, что переносное движение не является вращательным в данный или в каждый момент времени. Если равна нулю относительная скорость, то отсутствует в данный или в каждый момент времени относительное движение. И наконец, если угол между векторами относительной скорости и переносной угловой скорости равен 0° – это означает коллинеарность этих векторов.

В плоских рычажных механизмах ускорение Кориолиса возникает в так называемых кулисных механизмах, которые мы рассмотрим в следующей главе.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМАХ. ОСНОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Общие сведения о механизмах

Механизмом называется система взаимосвязанных тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел. Классическим примером механизма является кривошипно-ползунный механизм (рис.18), преобразующий вращательное движение в возвратно-поступательное движение (или, наоборот, возвратно-поступательное движение во вращательное).

Твёрдое тело, входящее в состав механизма, называется *звеном*. Так, кривошипно-ползунный механизм состоит из четырёх звеньев.

В составе механизма можно выделить ряд характерных звеньев.

- *Неподвижное звено* (стойка, основание, шасси). В данном случае – это основание, на котором крепятся подшипники кривошипа 1 и направляющие ползуна 3.
- *Входное (начальное) звено*. Это звено или несколько звеньев, которым сообщается преобразуемое движение. В кривошипно-ползунном механизме – это кри-

вошип. Именно ему сообщается вращательное движение.

- *Выходное звено.* Это звено, совершающее движение, для получения которого служит механизм. С выходным звеном, как правило, связывают рабочий орган машины.

– *Промежуточные или соединительные звенья.* В рассматриваемом примере (рис. 18) – это шатун 2.

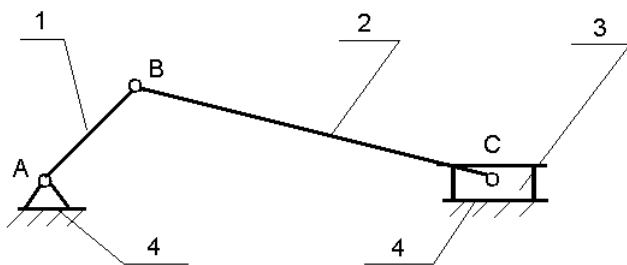


Рис. 18. Кривошипно-ползунный механизм

Для получения требуемого движения выходного звена, все звенья механизма должны быть определённым образом взаимосвязаны или соединены между собой. Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называют *кинематической парой*.

По характеру соприкосновения кинематические пары делят на низшие и высшие. В *низших кинематических парах* звенья при их относительном движении соприкасаются по некоторым поверхностям, а в *высших* – по линии или точке.

По виду используемых кинематических пар механизмы классифицируют следующим образом: рычажные, зубчатые, кулачковые, фрикционные, с гибкими звеньями. В дальнейшем мы будем рассматривать рычажные механизмы, звенья которых совершают плоское движение. Это так называемые *плоские рычажные механизмы*. *Рычажными* называют механизмы, звенья

которых образуют только низшие пары (поступательные и вращательные) (рис. 19).

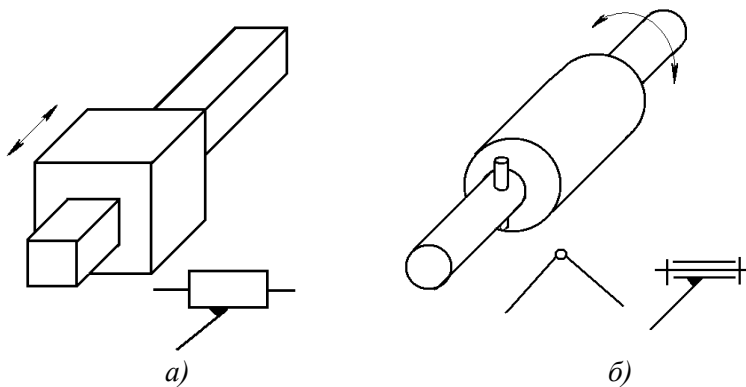


Рис. 19. Рычажные механизмы:
а – поступательные; б – вращательные

К ним относятся:

- кривошипно-ползунные (рис. 18);
- кривошипно-коромысловые (рис. 20, а);
- кулисные (рис. 20, б).

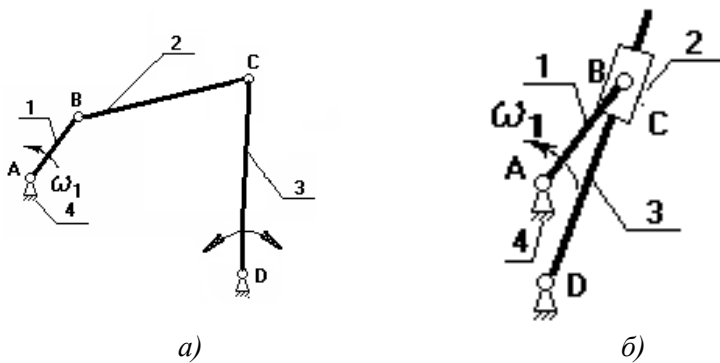


Рис. 20. Простые рычажные механизмы:
а – кривошипно-коромысловый; б – кулисный

В плоском механизме все звенья движутся в одной плоскости, все оси параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости механизма. Ряд звеньев рычажных механизмов имеют специальные названия.

Звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и совершающее полный оборот, называется *кривошипом*.

Звено, качающееся относительно неподвижной оси (совершающее неполный оборот), называется *коромыслом*.

Звено, соединяющее два подвижных звена и совершающее плоское движение, называют *шатун*ом.

Звено, совершающее возвратно-поступательное движение, называют *ползу*ном.

Подвижное звено, содержащее в себе ползун, называют кулисой, а механизм, включающий кулису, – кулисным механизмом.

2.2. Основные принципы построения планов механизмов

Планом механизма называют кинематическую схему механизма, вычерченную в определённом масштабе для некоторого момента времени. Последовательное построение ряда планов на чертеже позволяет проследить движение определённых точек механизма (определить положения звеньев в разные моменты времени) и вычертить траектории их движения.

План механизма строят по заданным размерам методом засечек в положении, определяемом углом φ_1 начального звена, в масштабе. Значение масштаба рассчитывают по формуле

$$\text{масштаб} = \frac{\text{отрезок чертежа (мм)}}{\text{физическая величина}}. \quad (2.1)$$

Масштаб длин будет $\mu_l = AB/l_{AB}$ (в миллиметрах на метр).

Длина отрезка (в миллиметрах), изображающая на схеме начальное звено, берется произвольно. Но целесообразно брать ее кратной реальной длине звена. Размеры остальных звеньев

находятся с учетом выбранного масштаба длин. Подробнее о построении плана механизма рассказано в главе 3.

2.3. Основные принципы определения кинематических характеристик при помощи графических методов

При помощи планов скоростей и ускорений определяются линейные абсолютные и относительные скорости и ускорения точек, а также угловые скорости и ускорения звеньев.

Построение планов скоростей начинают со звена, закон движения которого задан (кривошип).

1. Определяют скорость той точки этого звена, которая принадлежит и данному и последующему звену (кинематическая пара «кривошип – шатун»).

2. Затем по значению этой скорости, согласно формуле (2.1) в миллиметрах на метр-секунду в минус первой степени $\left(\frac{мм}{м/с} \right)$, выбирают масштаб μ_v плана скоростей.

3. Выбирают положение полюса плана скоростей P_v (точки, скорость которой равна нулю; здесь находятся и все другие точки с нулевыми скоростями).

4. Из полюса плана скоростей строят вектор найденной скорости. Составляют систему векторных уравнений, связывающих эту скорость со скоростями точек смежных звеньев. Если шатун расположен между кривошипом и коромыслом, то скорость точки определяется из системы уравнений плоского движения. Данная система уравнений будет иметь одно решение, если в ней есть искомая скорость одной из точек, суммируемая из переносной и относительной скоростей со стороны одного звена (как правило, кривошипа), и скорость этой же точки, суммируемая уже из переносной и относительной скоростей со стороны другого звена. Переносные скорости должны быть известны по величине и направлению, а относительные – по направлению. В уравнениях относительные скорости обозначают следующим образом: например, $\bar{V}_{BA}$ – это скорость точки B при движении звена AB относительно точки A .

5. Если два звена образуют поступательную кинематическую пару (ползун и его направляющая подвижна или непо-

движна), то для определения абсолютной скорости точки одного из этих звеньев используют векторное уравнение сложного движения. В том случае, когда направляющая неподвижна, абсолютная скорость искомой точки складывается, с одной стороны, из скорости предыдущей точки (переносной скорости) и скорости ползуна относительно этой точки. Вектор переносной скорости обычно уже известен. С другой стороны, абсолютная скорость ползуна равна скорости ползуна относительно направляющей. Если направляющая подвижна (кулисный механизм), то скорость точки ползуна, с одной стороны, складывается из скорости той точки кулисы (переносной скорости), которая в данный момент времени совпадает с точкой ползуна (точка кулисы находится под ползуном). С другой стороны, точка ползуна может принадлежать поступательно или вращательно движущемуся звену, в этом случае известно направление скорости данной точки, может быть известна и величина в зависимости от того, какое звено является ведущим.

Графическим решением любой системы векторных уравнений скоростей будет план скоростей. Стрелки векторов на плане проставляют в строгом соответствии с записанным уравнением, соблюдая правило векторного суммирования; при этом относительные скорости проходят вне полюса, а начала векторов абсолютных скоростей всегда находятся в полюсе. Концы векторов абсолютных скоростей являются точками пересечения прямых, на которых лежат относительные скорости. Из построенного плана находят длины отрезков, пропорциональные скоростям точек. Зная масштаб μ_v , определяют модули скоростей, а направление скоростей находят из плана. Далее переходят к последующим звеньям, соблюдая принцип принадлежности одной точки нескольким звеньям.

6. Если известны абсолютные скорости двух точек одного и того же звена, то скорость третьей точки, лежащей с ними на одной прямой, находят пропорциональным делением. Для этого на плане скоростей отрезок относительной скорости делят искомой точкой в том же соотношении, в котором соответствующая точка делит реальное звено на схеме механизма. Длину искомого отрезка определяют из пропорции (отношение длин на

звене механизма равно отношению отрезков на плане скоростей). Соединяя полученную точку с полюсом, находят отрезок искомой абсолютной скорости.

7. Абсолютную скорость третьей точки звена, не лежащей на одной прямой с двумя другими его точками, скорости которых известны, определяют методом подобия. Для этого на плане скоростей на отрезке известной относительной скорости строят треугольник, подобный тому, который имеется на схеме механизма, соблюдая одинаковое направление прочтения букв по вершинам треугольника на плане скоростей и на механизме. При этом стороны подобных треугольников взаимно перпендикулярны. В результате построения получается треугольник, составленный вершинами относительных скоростей. Соединяя построенную вершину треугольника с полюсом, находят отрезок искомой абсолютной скорости.

8. Зная линейные скорости точек, определяют угловые скорости звеньев по величине и по направлению. Для этого делят относительные вращательные скорости на длины соответствующих звеньев (расстояния до центра вращения в относительном вращательном движении).

План ускорений строят на основе векторных уравнений в той же последовательности, что и план скоростей. Масштабный коэффициент μ_a выбирают, после того как найдут ускорение ведущего звена, по тому же правилу, что и масштабный коэффициент плана скоростей μ_v . Коэффициент плана ускорений измеряется в миллиметрах на метр-секунду в минус второй степени $\left(\frac{мм}{м/с^2} \right)$. Полюсом плана ускорений является точка P_a .

1) Каждый из векторов представляют нормальной $\bar{a}^n$ и касательной $\bar{a}^r$ составляющими. При этом нормальное ускорение всегда известно по величине (так как план скоростей построен) и направлению (к центру вращения в относительном движении), а касательное ускорение перпендикулярно ему и неизвестно по величине. Индексы относительных ускорений и их составляющих проставляются аналогично индексам относи-

тельных скоростей. Концы векторов полных относительных и абсолютных ускорений являются точками пересечения прямых, на которых лежат соответствующие касательные ускорения.

2) На плане ускорений начало вектора абсолютного ускорения всегда находится в полюсе, а вектор относительного ускорения проходит вне полюса.

3) Метод пропорционального деления и метод подобия применяют только для полных относительных ускорений. При этом подобную фигуру следует строить на плане по трем сторонам, величина одной из которых известна, а две другие определяют из соответствующих пропорций, соблюдая одинаковое направление обхода при чтении букв по вершинам фигуры, составленной из полных относительных ускорений плана, и фигуры на звене механизма.

4) Абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, состоит из переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса. Последнее обусловлено тем, что точки звеньев, имеющие линейную относительную скорость v_{OTH} , участвуют во вращательном движении соответствующего звена с угловой скоростью $\omega_{ПЕР}$ вокруг мгновенного центра вращения. Для плоского механизма $a_K = 2\omega_{ПЕР}v_{OTH}$, так как в этом

случае $\sin\left(\frac{\omega_{ПЕР}}{v_{OTH}} \Lambda_{-}\right) = 1$. Направление ускорения Кориолиса

находят по правилу Жуковского поворотом вектора $\vec{v}_{OTH}$ на 90° в направлении вращения при взгляде с конца вектора переносной угловой скорости $\omega_{ПЕР}$. Для всех звеньев, которые движутся плоскопараллельно или поступательно, $\bar{a}_k$ будет равно нулю, поскольку в этих случаях переносное движение является поступательным.

Определив из плана касательные ускорения в относительном движении, подсчитывают величины угловых ускорений ε звеньев как отношения касательных ускорений к соответствующим длинам звеньев и определяют их направления.

2.4. Основные принципы определения кинематических характеристик при помощи аналитических методов

Понятие мгновенного центра скоростей имеет смысл, когда речь идёт в общем случае о плоскопараллельном и в частных случаях вращательном и поступательном движениях звеньев плоского многозвённого рычажного механизма.

Суть определения скоростей точек плоского механизма при помощи метода мгновенных центров скоростей заключается в графическом определении положения точки, являющейся мгновенным центром скоростей (МЦС).

Здесь, как и при любом виде расчёта плоского механизма, необходимо использовать принцип принадлежности точек, находящихся в шарнирах, одновременно двум или нескольким звеньям.

При определении положения МЦС звена на плоскости выполняются следующие операции:

1. На плане механизма изображается прямая, на которой лежит вектор скорости точки входного (как правило, кривошипа) и последующего звеньев (шатунa), а также сам вектор, так как он известен по величине. Масштаб векторов скоростей здесь значения не имеет.
2. Изображается прямая, на которой лежит вектор скорости последующей точки, принадлежащей шатуну и ползуну или шатуну и коромыслу.
3. Находится точка пересечения двух этих прямых. Это и есть МЦС. Мгновенный центр скоростей обозначают буквой P с индексом звена, например, P_{AB} .
4. По направлению вектора скорости первой точки и положению мгновенного центра скоростей определяется возможный поворот звена в данный момент времени.
5. Исходя из этого отмечается направление вектора скорости второй точки звена.
6. Величина скорости второй точки рассчитывается из геометрических построений в данном положении механизма (углов между звеньями или длин звеньев).
7. По направлению векторов линейных скоростей отмечается направление вращения каждого звена в данный момент времени.

8. Определяется угловая скорость звена как отношение линейной скорости точки к соответствующему расстоянию до мгновенного центра скоростей (используется свойство пропорциональности величин скоростей и расстояний от соответствующих точек до МЦС).

Наряду с общими случаями положения мгновенного центра скоростей, могут встретиться и частные случаи.

- Прямая, проведённая через две точки звена, является общим перпендикуляром к векторам скоростей, мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения данного перпендикуляра и прямой, соединяющей концы векторов. Если векторы скоростей сонаправлены и равны по модулю, то мгновенный центр скоростей окажется удалённым в бесконечность. В этом случае будем иметь *мгновенное поступательное движение*. При этом точки, в которых известны скорости, могут и не лежать на общем перпендикуляре к векторам скоростей.
- Скорость третьей точки звена, лежащей или не лежащей (треугольник на плане механизма) на одной прямой с двумя данными точками, определяют в обратном порядке, т.е. соединяют эту точку с МЦС, затем проводят из неё перпендикуляр и проставляют направление скорости третьей точки с учётом направления вращения звена.

Аналитический метод определения абсолютных ускорений точек плоского механизма заключается в том, что системы векторных уравнений, составленные для определения ускорения какой-либо точки, проецируются на оси выбранной плоской системы координат. При этом система координат должна выбираться таким образом, чтобы одна из её осей была параллельна направлению шатуна в данном положении механизма (если шатун соединён с коромыслом) или параллельна направляющей ползуна (если шатун соединён с ползуном). Если требуется определить ускорения последующих звеньев, действуют таким же образом. Подобный выбор системы координат обоснован тем, что проекции неизвестных касательных составляющих

ускорений обращаются в ноль и тем самым сокращается количество неизвестных в уравнениях. Углы, образуемые составляющими ускорения с осями координат, определяются аналитически, если возможно, или графически из плана механизма через функции угла. Порядок действий при аналитическом определении ускорений точек шатуна следующий:

1. Отдельно от плана механизма изображают систему координат с учетом расположения осей по отношению к звеньям.
2. В начале координат отмечают точку, ускорение которой необходимо найти.
3. Строят найденное ускорение точки, принадлежащей кривошипу и шатуну.
4. Записывают систему векторных уравнений для точки шатуна, ускорение которой нужно найти, и приравнивают их правые части. Если шатун соединён с ползуном, то достаточно одного уравнения через ускорение точки кривошипа.
5. Записывают уравнения в проекциях на оси координат и отмечают векторы, начала которых исходят из точки, ускорение которой необходимо найти.
6. Аналитически или графически определяют углы между векторами и направлениями осей.
7. Пользуясь результатами определения скоростей аналитическими методами, рассчитывают нормальные составляющие ускорений.
8. Из уравнений определяют относительные касательные ускорения. Если они получаются отрицательные, значит, истинные их направления – противоположны.
9. Рассчитывают полные относительные ускорения.
10. Вычисляется угловое ускорение шатуна.

Далее производится сравнительный анализ графического и аналитического методов определения кинематических характеристик шатуна. Погрешность должна быть не более 5 %.

3. ПРИМЕР КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛОСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2 \text{ с}^{-1}$. Определить для заданного положения механизма:

1. Скорости точек $A, B, D...$ механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей.
2. Скорости этих же точек и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей.
3. Ускорения точек A и B , средней точки звена AB и угловое ускорение звена при помощи плана ускорений звена AB .
4. Ускорения этих же точек при помощи аналитического метода определения ускорений.

3.1. Построение плана механизма

На основании данных, представленных в табл.1, строим план механизма.

Таблица 1. Исходные данные

φ , град	Расстояние, см				Длина звена, см						Угол, град		
	a	b	c	d	O_1A	AB	AD	DE	EO_2	CO_2	CG	α	β
60	75	75	62	36	22	70	35	55	25	32	70	30	60

1. Выбираем масштаб длин. Пусть длина кривошипа (звена O_1A) будет равна на плане 22 мм. Тогда масштабный коэффициент $\mu_l = \frac{22}{22} = 1 \frac{\text{мм}}{\text{мм}}$.
2. Изображаем кривошип под углом 60° к горизонтали. Отмечаем точку A (рис. 21).
3. Проводим дугу окружности с центром в точке A радиусом AB .
4. Определяем положение горизонтальной направляющей ползуна G , находящейся на расстоянии b от шарнирной опоры O_1 .

5. Определяем положение шарнирной опоры O_2 , находящейся на расстоянии c от горизонтальной направляющей ползуна G и расстоянии a от опоры O_1
6. Определяем положение наклонной направляющей ползуна B . Для этого проводим дугу окружности радиусом d и строим прямую, составляющую 30° с вертикалью и проходящую через точку O_2 таким образом, чтобы она являлась касательной к этой окружности.

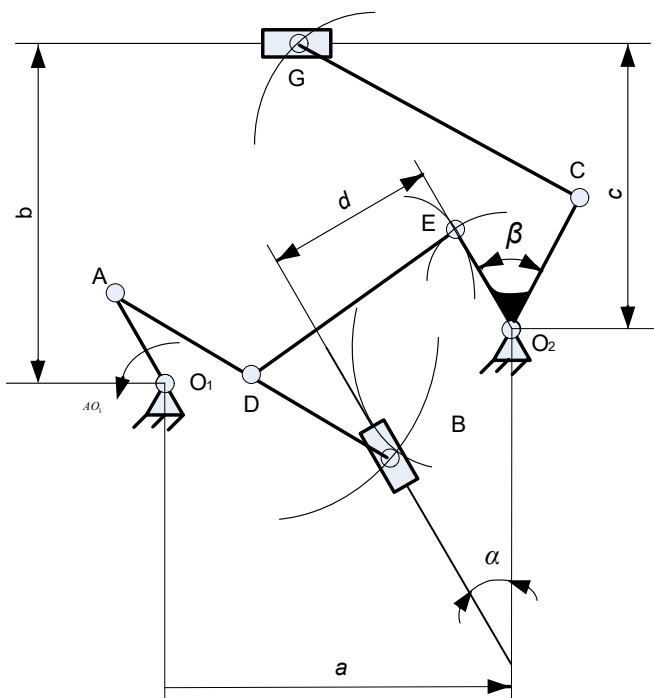


Рис. 21. План плоского многосвязного рычажного механизма

7. Находим положение ползуна на наклонной направляющей в данный момент времени (точка B). Это есть точка пересечения окружности радиуса AB и направляющей.
8. Точка D делит звено AB пополам.

9. Определяем положение точки E . Для этого проводим дугу окружности радиусом DE . Затем из точки O_2 проводим дугу окружности радиусом O_2E . Точка пересечения двух окружностей и даст положение точки E в данный момент времени.
10. Откладываем от отрезка O_2E угол 60° в направлении движения по часовой стрелке. Затем на полученной прямой – отрезок O_2C .
11. Положение точки G в данный момент времени определится пересечением окружности радиуса CG и горизонтальной направляющей ползуна G .

3.2. Построение плана скоростей

Отметим, что определяемые кинематические величины носят мгновенный характер, т.е. меняются с течением времени в одних случаях по направлению, в других – по величине, в третьих – и по величине и по направлению.

1. Определяем скорость точки A кривошипа O_1A . Поскольку кривошип движется вращательно, то модуль $\vec{V}_A$ определяется так:

$$V_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 22 \cdot 2 = 44 \text{ (см/с)}, \quad \vec{V}_A \perp O_1A.$$

Выбираем полюс плана скоростей P_V . Вектор скорости точки A направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 22).

Исходя из удобства построения чертежа и его размеров, выбираем масштаб плана скоростей. Пусть длина вектора скорости точки A $\vec{V}_A$ будет равна 44 мм. Тогда масштабный коэффициент $\mu_V = \frac{44}{44} = 1 \frac{\text{см} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}$. Из полюса плана скоростей под углом

90° к направлению кривошипа проводим вектор $\vec{V}_A$.

2. Определяем скорость точки B – $\vec{V}_B$. Для этого необходимо записать систему векторных уравнений для скорости точки B ,

используя свойства плоскопараллельного движения тела и сложного движения точки :

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \\ \bar{V}_B = \bar{V}_{BB'} + \bar{V}_{B'}. \end{cases}$$

Здесь $\bar{V}_B$ – абсолютная скорость точки B ; $\bar{V}_{BA}$ – скорость точки B в относительном вращении вокруг полюса A ; $\bar{V}_{BB'}$ – скорость точки B относительно B' . Точка B' находится на направляющей ползуна (под ползуном), а точка B – непосредственно на ползуне. Поскольку B' принадлежит неподвижной направляющей, то ее скорость равна 0. Тогда система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \\ \bar{V}_B = \bar{V}_{BB'}. \end{cases}$$

Далее из конца вектора $\bar{V}_A$ проводим прямую, перпендикулярную звену AB , на которой будет лежать вектор скорости относительного вращения звена AB вокруг полюса A – $\bar{V}_{BA}$. И из полюса плана скоростей проводим прямую, параллельную направляющей ползуна B , на которой будет лежать вектор скорости точки B – $\bar{V}_B$. Абсолютная скорость ползуна равна в данном случае его относительной скорости по отношению к направляющей, что отражено в уравнении. Точка пересечения построенных прямых – точка B . Направление векторов определяем в соответствии с правилами векторного суммирования согласно системе уравнений. Из плана скоростей определяем длины

$$\text{векторов } \left| \bar{V}_B \right| = P_v b = 23,5 \text{ мм и } \left| \bar{V}_{BA} \right| = ab = 50 \text{ мм.}$$

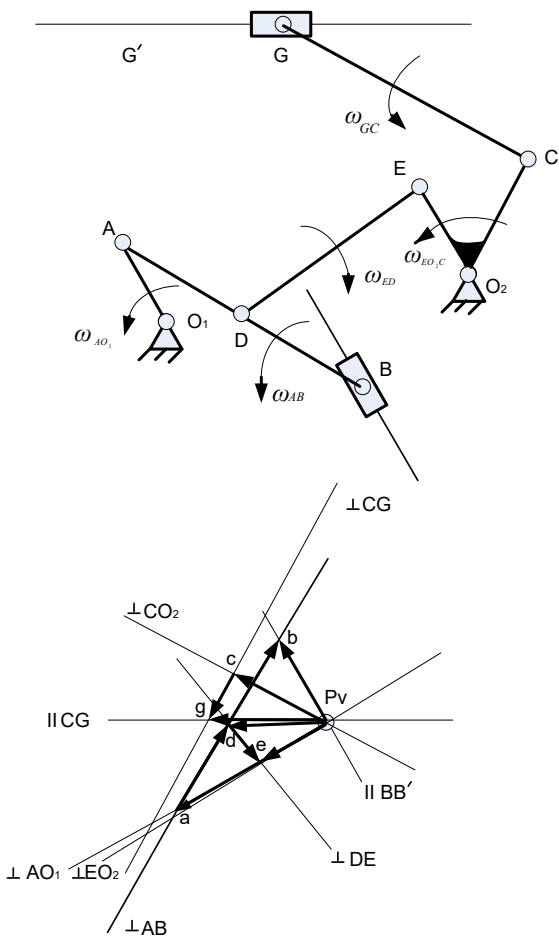


Рис. 22. План скоростей

Умножая эти значения на масштабный коэффициент плана скоростей, определяем величины абсолютной и относительной скоростей точки B

$$V_B = 23,5 \text{ см/с} \text{ и } V_{BA} = 50 \text{ см/с.}$$

3. Определяем скорость точки D . Она принадлежит звену AB , поэтому её скорость определяется из пропорционального отношения отрезков на плане скоростей и отрезков на плане механизма:

$$ad/AD = ab/AB.$$

Отсюда $ad = 25$ мм. Длина полученного отрезка – это длина вектора относительной скорости $\overline{V}_{DA}$. Конец вектора $\overline{V}_{DA}$ находится в точке d . Соединяя полученную точку с полюсом P_v , получаем вектор абсолютной скорости точки D . Находим длину

вектора $\overline{V}_D : \left| \overline{V}_{DA} \right| = P_v d = 25$ мм. Умножая длины полученных

отрезков на масштабный коэффициент плана скоростей, находим величины абсолютной и относительной скоростей точки D :

$$V_D = V_{DA} = 25 \text{ см/с}.$$

4. Запишем систему векторных уравнений для скорости точки E :

$$\begin{cases} \overline{V}_A = \overline{V}_D + \overline{V}_{ED}, \\ \overline{V}_A = \overline{V}_{EO_2}. \end{cases}$$

Во втором уравнении системы абсолютная скорость точки E равна относительной вращательной скорости точки E вокруг полюса O_2 . Но точка O_2 неподвижна (жёсткое звено EO_2C совершает вращательное движение относительно оси, проходящей через точку O_2), поэтому абсолютная скорость равна относительной.

По аналогии со скоростью точки B из конца вектора $\overrightarrow{V}_D$ проводим перпендикуляр к направлению звена ED . Затем из полюса плана скоростей P_v строим прямую, перпендикулярную отрезку EO_2 , и находим точку пересечения полученных прямых.

Это будет точка e . Расставляем векторы в соответствии с правилами векторного суммирования. Из плана определяем длины векторов:

$$\left| \overline{V_A} \right| = P_{Ve} = 20 \text{ мм} \text{ и } \left| \overline{V_{AD}} \right| = ed = 12,5 \text{ мм}.$$

Умножая эти значения на масштабный коэффициент плана скоростей, определяем величины скоростей:

$$V_E = 20 \text{ см/с} \text{ и } V_{ED} = 12,5 \text{ см/с}.$$

5. Поскольку звено EO_2C жёсткое, то точки E и C движутся относительно опоры O_2 во вращении отрезков EO_2 и CO_2 с одинаковой угловой скоростью ω_{EO_2C} , поэтому модуль скорости точки C найдём из пропорции

$$\omega_{EO_2C} = \frac{V_E}{EO_2} = \frac{V_C}{CO_2}.$$

$$\text{Отсюда } V_C = \frac{V_E \cdot CO_2}{EO_2} = \frac{20 \cdot 32}{25} = 25,6 \text{ см/с}.$$

Направление вектора скорости точки C найдём, отложив на плане скоростей прямую под углом 60° к направлению вектора V_E по ходу часовой стрелки (так, чтобы на плане образовалась фигура, подобная жёсткому звену EO_2C) и разделив значение скорости точки C на масштабный коэффициент плана скоростей. Получив длину отрезка P_{Vc} , отложим этот отрезок на данной прямой.

6. Скорость точки G определяем из системы векторных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{V}_G = \overline{V}_{\dot{N}} + \overline{V}_{GC}, \\ \overline{V}_G = \overline{V}_{GG'}. \end{cases}$$

Из точки c на плане скоростей проводим перпендикуляр к направлению звена CG , а из полюса – горизонталь (параллель GG'). Точка пересечения этих двух прямых даст точку G . Отмечаем вектора и находим их длины:

$$\left| \overline{V}_G \right| = P_{Vg} = 29 \text{ мм} \quad \text{и} \quad \left| \overline{V}_{GC} \right| = g_c = 13 \text{ мм}.$$

Умножая на масштабный коэффициент полученные отрезки, получаем относительную и абсолютную скорости точки G :

$$V_G = 29 \text{ см/с} \quad \text{и} \quad V_{GC} = 13 \text{ см/с}.$$

3.3. Определение мгновенных угловых скоростей звеньев механизма с помощью плана скоростей

Модули угловых скоростей звеньев будем определять как отношения скоростей относительного вращательного движения к длинам соответствующих звеньев.

1. Угловая скорость звена AB :

$$\omega_{\hat{A}\hat{A}} = \frac{V_{\hat{A}\hat{A}}}{\hat{A}\hat{A}} = \frac{50}{70} = 0,71 \text{ с}^{-1}.$$

2. Угловая скорость звена ED :

$$\omega_{ED} = \frac{V_{ED}}{\hat{A}D} = \frac{12,5}{55} = 0,23 \text{ с}^{-1}.$$

3. Угловая скорость звена EO_2C :

$$\omega_{\hat{A}\hat{I}_2\hat{N}} = \frac{V_{\hat{A}}}{\hat{A}\hat{I}_2} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ с}^{-1}.$$

4. Угловая скорость звена CG :

$$\omega_{CG} = \frac{V_{\tilde{NG}}}{\tilde{NG}} = \frac{13}{70} = 0,19 \text{ с}^{-1}.$$

Направления вращения звеньев в данный момент времени указываем, исходя из направления векторов относительных скоростей на плане скоростей.

3.4. Построение плана ускорений для звена AB механизма и определение его углового ускорения при помощи плана ускорений

Построение плана ускорений, так же как и плана скоростей, начинаем с определения ускорения той точки, которая принадлежит входному звену механизма. Это точка A . Данная точка участвует во вращательном движении кривошипа O_1A относительно опоры O_1 , причём вращение кривошипа равномерное. Поэтому абсолютное ускорение точки A будет равно одной только нормальной составляющей ускорения и его модуль определится как

$$\dot{a}_n = \omega_{O_1A}^2 \cdot \hat{I}_1 \hat{A} = 2^2 \cdot 22 = 88 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение точки A направлено по радиусу описываемой точкой A окружности в процессе движения к её центру (рис. 23).

Выбираем масштабный коэффициент плана ускорений μ_a :

$$\mu_a = \frac{88}{88} = 1 \frac{\tilde{n}\dot{i} \cdot \tilde{n}^2}{\dot{i}\ddot{i}}.$$

Выбираем положение полюса плана ускорений P_a . Из полюса параллельно направлению кривошипа O_1A от точки A к точке O_1 проводим вектор $P_a a$ длиной 44 мм. Отмечаем точку a .

Найдём ускорение точки B . Для этого составляем систему векторных уравнений для ускорения точки B :

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{BB'} + \bar{a}_{B'}. \end{cases}$$

Запишем систему уравнений, выразив полные относительные ускорения через их нормальные и касательные составляющие:

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{BB'}^n + \bar{a}_{BB'}^\tau + \bar{a}_{B'}^n + \bar{a}_{B'}^\tau. \end{cases}$$

Здесь $\bar{a}_B$ — абсолютное ускорение точки B ; $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}^\tau$ — нормальная и касательная составляющие ускорения точки B в относительном вращательном движении вокруг полюса A ; $\bar{a}_A^n$ и $\bar{a}_A^\tau$ — нормальная и касательная составляющие ускорения точки A .

Поскольку звено O_1A вращается с постоянной угловой скоростью (о чём уже упоминалось), касательная составляющая ускорения $\bar{a}_A^\tau$ будет равна 0. Ускорения $\bar{a}_{B'}^n$ и $\bar{a}_{B'}^\tau$ равны 0, поскольку B' принадлежит неподвижной направляющей BB' . Нормальная составляющая ускорения точки B ползуна относительно B' $\bar{a}_{BB'}^n$ также равна 0, поскольку ползун совершает возвратно-поступательное движение. С учетом этих факторов система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{BB'}^\tau. \end{cases}$$

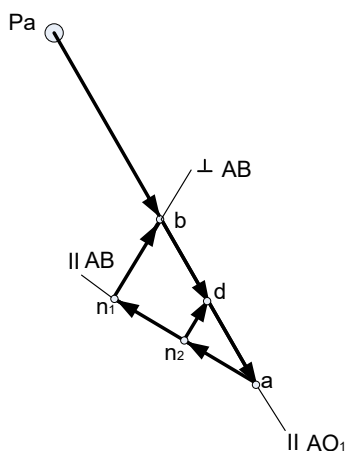
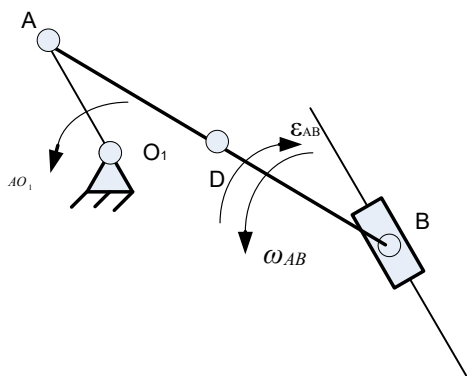


Рис. 23. План ускорений для звена AB механизма

Величина нормального ускорения в относительном вращательном движении звена AB вокруг точки A a_{BA}^n будет равна

$$a_{BA}^n = \omega_{AA}^2 \cdot \hat{AA} = 0,71^2 \cdot 70 = 35,29 \text{ см/с}^2.$$

Длина вектора $\bar{a}_{BA}^n$ на плане ускорений определится как отношение величины этого нормального ускорения к масштабному коэффициенту плана ускорений:

$$\left| \bar{a}_{AA}^n \right| = \frac{\dot{a}_{AA}^n}{\mu_{\dot{a}}} = \frac{35,29}{I} = 35,29 \text{ мм.}$$

Из точки a проводим прямую, параллельную направлению звена AB и на ней откладываем вектор $\bar{a}_{BA}^n$ таким образом, чтобы он был направлен от точки B к точке A (центру относительного вращения). Получаем точку n_I . Касательное ускорение в относительном вращательном движении звена AB $\bar{a}_{BA}^\tau$ неизвестно ни по величине, ни по направлению, но лежит на перпендикуляре к нормальному ускорению $\bar{a}_{BA}^n$ (направлению шатуна AB). Поэтому из точки n_I проводим перпендикуляр к звену AB . Из полюса плана ускорений проводим параллель направляющей ползуна B , поскольку абсолютное ускорение точки B равно касательной составляющей относительного возвратно-поступательного движения ползуна вдоль направляющей. Точка пересечения двух перпендикуляров и даст искомую точку b плана ускорений.

В данном примере направления кривошипа и направляющей ползуна B совпадают, поэтому вектор ускорения точки A и вектор полного ускорения ползуна лежат на одной прямой. Расставляем векторы в соответствии с правилами векторного суммирования и согласно векторным уравнениям для ускорения точки B .

Определяем длины отрезков $P_a b$ и $n_I b$, соответствующие полному ускорению точки B и его касательной составляющей в относительном вращении:

$$\left| \bar{a}_{AA}^\tau \right| = n_I b = 20 \text{ мм;} \quad \left| \bar{a}_A \right| = D_a b = 47 \text{ мм.}$$

Значения соответствующих модулей ускорений:

$$a_{BA}^{\tau} = 20 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2}; \quad a_B = 47 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2}.$$

Модуль полного ускорение точки B в относительном вращательном движении вокруг полюса A :

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^{\tau})^2} = \sqrt{35,29^2 + 20^2} = 40,56 \frac{cm}{c^2}.$$

Находим ускорение точки, делящей звено AB пополам. В данном случае, это точка D . Точка d будет лежать на плане ускорений между точками a и b и делить отрезок ab пополам (аналогично скоростям). Касательная, нормальная составляющая и полное ускорение точки D в относительном вращении вокруг полюса A будут составлять половину соответствующих ускорений точки B :

$$a_{DA}^{\tau} = \frac{\dot{a}_{\dot{A}\dot{A}}^{\tau}}{2} = 10 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2}; \quad a_{DA}^n = \frac{\dot{a}_{\dot{A}\dot{A}}^n}{2} = 17,65 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2};$$

$$a_{D\dot{A}} = \frac{\dot{a}_{\dot{A}\dot{A}}}{2} = 20,28 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2}.$$

Модуль полного ускорения точки D определится как произведение длины отрезка P_ad на масштабный коэффициент плана ускорений μ_a :

$$\dot{a}_D = D_a d \cdot \mu_a = 68 \cdot l = 68 \frac{\tilde{n}\dot{l}}{\tilde{n}^2}.$$

В данном примере длина векторы ускорения точки D $\vec{a}_D$ равна скалярной разности длин векторов ускорения точки A $\vec{a}_A$ и относительного ускорения $\vec{a}_{DA}$, поскольку все эти векторы лежат на одной прямой.

Определим модуль мгновенного углового ускорения звена AB $\mathcal{E}_{AB}$ как отношение касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ в относительном вращательном движении к длине звена AB :

$$\mathcal{E}_{AB} = \frac{\dot{a}_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{20}{70} = 0,29 \text{ н}^{-2}.$$

Направление углового ускорения $\mathcal{E}_{AB}$ определится вектором относительного касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\tau}$. Из плана ускорений видно, что вращение шатуна AB в данный момент времени – замедленное.

3.5. Определение скоростей точек плоского многозвонного рычажного механизма методом мгновенных центров скоростей (МЦС)

Метод МЦС для расчёта скоростей точек плоского механизма заключается в определении положения мгновенного центра скоростей точек звеньев, совершающих плоское движение, и рассмотрении движения данных звеньев как вращательного относительно МЦС.

В данном механизме такими звеньями являются шатуны AB , DE и CG .

1. Скорость точки A уже известна как по модулю, так и по направлению, она равна 44 см/с . Изображаем её символически на плане механизма (рис. 24).

2. Определим методом МЦС скорость точки B ползуна и мгновенную угловую скорость шатуна AB . Для этого определим

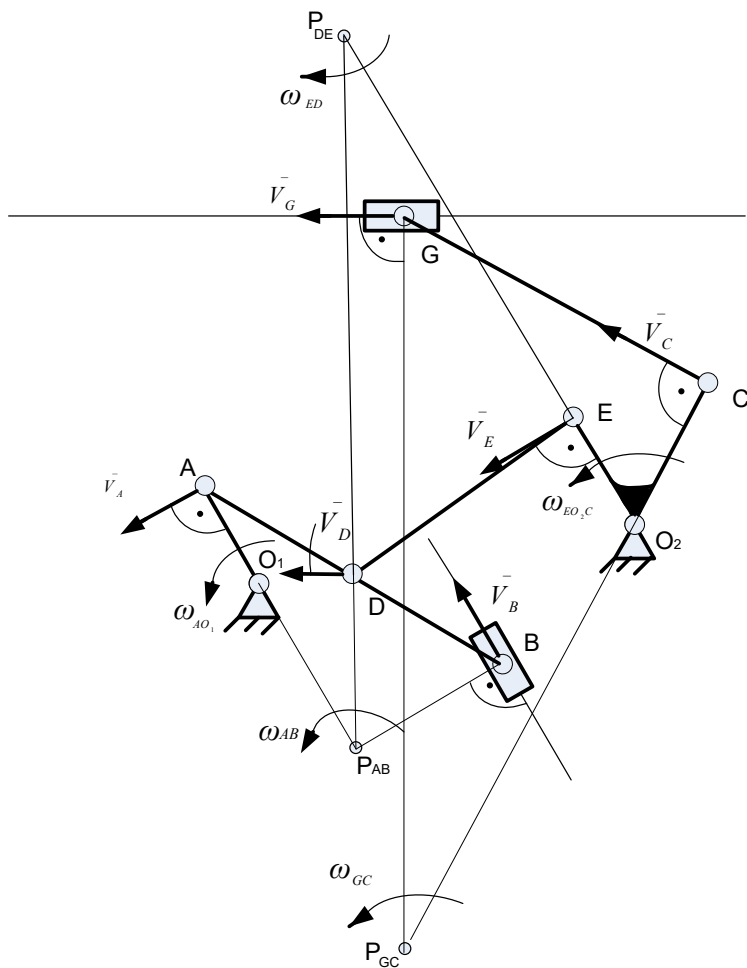


Рис. 24. Определение положения мгновенных центров скоростей плоского рычажного механизма

положение мгновенного центра скоростей для звена AB . Положение МЦС известно, если известны скорости двух точек хотя бы по направлению. Для звена AB это условие выполняется. МЦС звена AB (P_{AB}) находится в точке пересечения перпендикуляров в направлении векторов скоростей точек A и B .

Затем воспользуемся свойством мгновенных центров скоростей о том, что скорости точек тела пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_B}{BP_{AB}} = \omega_{AB}.$$

Каждое из этих отношений будет представлять собой мгновенную угловую скорость звена AB (по аналогии с вращательным движением).

$$\text{Используя масштаб длин плана механизма } \mu_l = l \frac{\dot{n}}{\dot{i}},$$

найдем расстояния AP_{AB} и BP_{AB} . Следовательно, все длины в миллиметрах на плане механизма будут соответствовать длинам в сантиметрах реального механизма.

$AP_{AB} = 61,5 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 34 \text{ см}.$ Скорость точки B равна

$$V_B = \frac{V_A \cdot BP_{AB}}{AP_{AB}} = \frac{44 \cdot 34}{61,5} = 24,32 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Мгновенная угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = \frac{44}{61,5} = 0,71 \text{ с}^{-1}.$$

По положению точки P_{AB} и направлению скорости точки A определяем, в какую сторону в данный момент времени происходит вращение звена AB по отношению к мгновенному центру скоростей.

3. Модуль скорости точки D звена AB определяем как произведение угловой скорости шатуна AB на расстояние от точки D до точки P_{AB} :

$$V_D = \omega_{\dot{A}\dot{A}} \cdot DP_{\dot{A}\dot{A}} = 0,71 \cdot 35,6 = 25,28 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

На плане механизма символически изображаем векторы скоростей точек A , B и D .

4. Определяем скорость точки E и мгновенную угловую скорость шатуна ED . Для этого находим положение МЦС звена ED , восстанавливая перпендикуляры к векторам скоростей точек E и D . Обращаем внимание на то, что точка E также принадлежит жёсткому звену EO_2C и участвует во вращательном движении относительно опоры O_2 .

Далее пользуемся свойством пропорциональности скоростей и расстояний до МЦС: $\frac{V_D}{DP_{ED}} = \frac{V_E}{EP_{ED}} = \omega_{ED}$.

Отсюда скорость точки E определится следующим образом:

$$V_E = \frac{V_D \cdot EP_{ED}}{DP_{ED}} = \frac{25,28 \cdot 90}{110} = 20,68 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Мгновенная угловая скорость звена ED

$$\omega_{ED} = \frac{25,28}{110} = 0,23 \text{ с}^{-1}.$$

Учитывая положение точки P_{ED} и направление вектора скорости точки D , изображаем вектор скорости точки E и обозначаем круговой стрелкой направление вращения звена ED .

5. Определяем скорость точки C и мгновенную угловую скорость звена EO_2C . Звено EO_2C совершает вращательное движение, свойство пропорциональности скоростей и расстояний применимо и в этом случае. Отличие от плоскопараллельного движения шатунов состоит в том, что положение центра вращения O_2 является величиной постоянной во времени.

$$\frac{V_E}{EO_2} = \frac{V_C}{CO_2} = \omega_{EO_2C}.$$

Отсюда скорость точки C

$$V_C = \frac{V_E \cdot CO_2}{EO_2} = \frac{20,68 \cdot 32}{25} = 26,47 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Мгновенная угловая скорость звена EO_2C

$$\omega_{EO_2C} = \frac{20,68}{25} = 0,83 \text{с}^{-1}.$$

Отмечаем вектор $\vec{V}_C$ и направление вращения звена EO_2C .

6. Определяем скорость точки G и мгновенную угловую скорость звена CG . Всё делается аналогично предыдущим пунктам:

$$\frac{V_C}{CP_{CG}} = \frac{V_G}{GP_{CG}} = \omega_{CG};$$

$$V_G = \frac{V_C \cdot GP_{CG}}{CP_{CG}} = \frac{26,47 \cdot 150}{131} = 30,31 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Мгновенная угловая скорость звена CG

$$\omega_{CG} = \frac{26,47}{131} = 0,2 \text{с}^{-1}.$$

3.6. Расчёт относительных погрешностей линейных и угловых скоростей, определенных разными методами

Рассчитаем относительные погрешности, образующиеся при определении линейных и угловых скоростей разными методами.

Погрешности определим по формуле

$$\delta = \frac{\lambda_{\bar{o}} - \lambda_{\text{м}}}{\lambda_{\text{м}}} \cdot 100\%,$$

где λ_b – значение линейной или угловой скорости, большее по модулю; λ_m – значение линейной или угловой скорости, меньшее по модулю.

Сведём в таблицы (по образцу таблиц 2, 3) значения линейных и угловых скоростей, полученных методом плана скоростей и методом МЦС.

Таблица 2. Значения линейных скоростей, полученных методом плана скоростей и методом МЦС

	Точки					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>G</i>
Значение скорости по плану скоростей, см/с	44	23,5	25	20	25,5	29,5
Значение скорости методом МЦС, см/с	44	24,32	25,28	20,68	26,47	30,31
Относит. погрешность, %	0	3,5	1,1	3,4	3,8	2,7

Таблица 3. Значения угловых скоростей, полученных методом плана скоростей и методом МЦС

	Звенья				
	<i>AO_I</i>	<i>AB</i>	<i>ED</i>	<i>EO₂C</i>	<i>CG</i>
Значение угловой скорости по плану скоростей, с ⁻¹	2	0,71	0,23	0,8	0,19
Значение угловой скорости методом МЦС, с ⁻¹	2	0,71	0,23	0,83	0,2
Относит. погрешность, %	0	0	0	3,8	5,2

3.7. Определение ускорений точек и углового ускорения шатуна АВ аналитическим методом

Аналитический метод определения ускорений точек заключается в том, что находятся проекции абсолютных ускорений точек с помощью проецирования векторных уравнений на оси выбранной системы координат.

Запишем систему векторных уравнений для определения ускорения точки *B*:

$$\begin{cases} \overline{a_B} = \overline{a_A}^n + \overline{a_{BA}}^n + \overline{a_{BA}}^\tau, \\ \overline{a_B} = \overline{a_{BB'}}^\tau. \end{cases}$$

Приравняем правые части данной системы и спроецируем полученное уравнение на оси координат (рис. 25):

$$\overline{a_A}^\tau + \overline{a_{AA}}^n + \overline{a_{AA}}^\tau = \overline{a_{AA'}}^\tau.$$

Оси координат должны выбираться таким образом, чтобы максимально сократить число неизвестных в уравнениях.

Обычно, если шатун, соединённый с кривошипом, соединён дальше с поводком, то одна из осей строится параллельно шатуну. Если же вместо поводка имеется ползун, то одна из осей выбирается параллельно направляющей ползуна.

В проекциях получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a}_{BX} = -\overline{a_{BA}}^n \cdot \cos \alpha + \overline{a_{BA}}^\tau \cdot \sin \alpha = 0, \\ \overline{a_{BY}} = -\dot{a}_A + \dot{a}_{AA}^n \cdot \sin \alpha + \dot{a}_{AA}^\tau \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Касательную составляющую относительного ускорения $\overline{a_{BA}}^\tau$ и абсолютное ускорение точки B $\overline{a_B}$ направляем вдоль линий действия произвольным образом. Если при расчёте они получатся отрицательными, значит, истинные направления $\overline{a_{BA}}^\tau$ и $\overline{a_B}$ – противоположные.

В общем случае угол α можно рассчитать, воспользовавшись построениями при определении МЦС через функции угла.

В нашем случае он будет равен

$$\arccos \frac{\hat{A} \hat{D}_{AA}}{\hat{A} \hat{A}} = 60,92^\circ.$$

Вычислим проекции ускорения точки B .

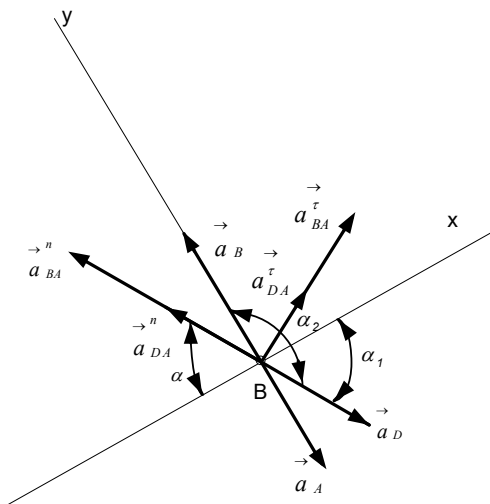
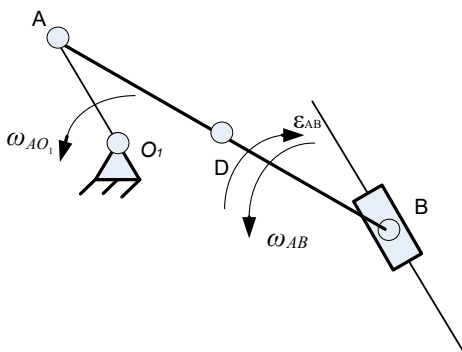


Рис.25. Определение ускорений точек А и D аналитическим методом

Модуль нормальной составляющей $\overline{a_{BA}^n}$ определится как произведение квадрата угловой скорости звена AB , рассчитанный аналитическим методом на длину звена AB :

$$\dot{a}_{AA}^n = \omega^2_{AA} \cdot \dot{AA} = 0,71^2 \cdot 70 = 35,29 \frac{\tilde{n}\dot{i}}{\tilde{n}^2}.$$

Таким образом, в полученной системе уравнений для проекций ускорения точки B есть 2 неизвестные величины, поэтому система имеет одно решение.

Выразим из первого уравнения $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ и подставим её во второе:

$$\dot{a}_{BA}^{\tau} = \frac{\dot{a}_{AA}^n \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = 19,62 \frac{\tilde{n}\dot{t}}{\tilde{n}^2};$$

$$a_B = a_{BY} = -88 + 35,29 \cdot \sin 60,92^\circ + 19,62 \cdot \cos 60,92^\circ = -47,62 \frac{CM}{c^2}.$$

Знак «—» показывает, что истинное направление ускорения точки B будет противоположным, что и подтверждается планом ускорений.

Определим угловое ускорение звена AB :

$$\varepsilon_{AA} = \frac{\dot{a}_{AA}^{\tau}}{\dot{AA}} = \frac{19,62}{70} = 0,28 \tilde{n}^{-2}.$$

Модуль ускорения точки D звена AB найдём, используя векторное уравнение плоского движения

$$\overline{a}_A + \overline{a}_{DA}^n + \overline{a}_{DA}^{\tau} = \overline{a}_D$$

и проецируя его на оси координат

$$\begin{cases} \dot{a}_{DX} = -a_{DA}^n \cdot \cos \alpha + a_{DA}^{\tau} \cdot \sin \alpha, \\ a_{DY} = -\dot{a}_A + \dot{a}_{DA}^n \cdot \sin \alpha + \dot{a}_{DA}^{\tau} \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Но, в отличие от абсолютного ускорения точки B , направление прямой, на которой лежит вектор ускорения точки D , неизвестно. Зато можно найти касательную составляющую a_{DA}^{τ} в относительном движении a_{DA}^{τ} :

$$a_{DA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AD = 0,28 \cdot 35 = 9,8 \frac{CM}{c^2}.$$

Нормальная составляющая

$$a_{DA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AD = 0.71^2 \cdot 35 = 17,64 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Проекция по оси X

$$a_{DX} = 17,64 \cdot \cos 60,92^\circ + 9,8 \cdot \sin 60,92^\circ = 17,13 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Проекция по оси Y

$$a_{DY} = -88 + 17,64 \cdot \sin 60,92^\circ + 9,8 \cdot \cos 60,92^\circ = -67,82 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Абсолютное ускорение точки D

$$a_D = \sqrt{a_{DX}^2 + a_{DY}^2} = \sqrt{17,13^2 + 67,82^2} = 69,95 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

3.8. Расчёт относительных погрешностей ускорений точек и углового ускорения шатуна АВ, определенных разными методами

Относительные погрешности по ускорениям рассчитываются аналогично погрешностям по скоростям.

Результаты расчёта методом плана ускорений и аналитическим методом сведём в таблицу (по образцу табл.4).

Таблица 4. Ускорения точек A, B и D, рассчитанные методом плана ускорений и аналитическим методом

	Точки			Угловое ускорение звена АВ, с ⁻²
	A	B	D	
Значение ускорения методом плана ускорений, см/с ²	88	47	68	0,29
Значение ускорения аналитическим методом, см/с ²	88	47,62	69,95	0,28
Относит. погрешность, %	0	1,31	2,87	3,6

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛОСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Для заданного плоского механизма (рис.26-31) по данным варианта (табл.5) для четырех соответствующих положений:

- 1.Произвести структурный анализ механизма;
- 2.Вычертить кинематические схемы механизма по заданным размерам их звеньев и положениям ведущих звеньев;
- 3.Составить векторные уравнения, определяющие абсолютные и относительные скорости и ускорения соответствующих точек звеньев механизма, и определить их величины путем построения планов скоростей и ускорений, а также величины угловых скоростей и ускорений звеньев механизма.

Длины звеньев механизмов и расстояния между опорами приведены в миллиметрах. Во всех механизмах входным является звено АВ. Угол поворота звена откладывается от горизонтали против часовой стрелки. Варианты заданий

Таблица 5. Значения угловых скоростей, полученных методом плана скоростей и методом МЦС

Вариант	№ схем	Угол наклона входного звена АВ для каждого из четырех положений			
		1	2	3	4
1	1	30	120	210	300
2	1	60	150	240	330
3	2	30	120	210	300
4	2	60	150	240	330
5	3	30	120	210	300
6	3	60	150	240	330
7	4	30	120	210	300
8	4	60	150	240	330
9	5	30	120	210	300
10	5	60	150	240	330
11	6	30	120	210	300
12	6	60	150	240	330
13	7	30	120	210	300
14	7	60	150	240	330

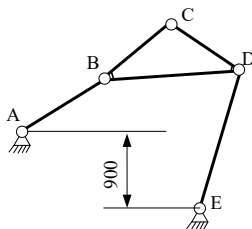
Продолжение таблицы 5.

Вари- ант	№ схем	Угол наклона входного звена АВ для каждого из четы- рех положений			
		1	2	3	4
15	8	30	120	210	300
16	8	60	150	240	330
17	9	30	120	210	300
18	9	60	150	240	330
19	10	30	120	210	300
20	10	60	150	240	330
21	11	30	120	210	300
22	11	60	150	240	330
23	12	30	120	210	300
24	12	60	150	240	330
25	13	30	120	210	300
26	13	60	150	240	330
27	14	30	120	210	300
28	14	60	150	210	330
29	15	30	120	240	300
30	15	60	150	210	330
31	16	30	120	240	300
32	16	60	150	210	330
33	17	30	120	240	300
34	17	60	150	210	330
35	18	30	120	240	300
36	18	60	150	210	330
37	19	30	120	210	300
38	19	60	150	240	330
39	20	30	120	210	300
40	20	60	150	240	330
41	21	30	120	210	300
42	21	60	150	240	330
43	22	30	120	210	300
44	22	60	150	240	330
45	23	30	120	210	300
46	23	60	150	240	330
47	24	30	120	210	300
48	24	60	150	240	330

Окончание таблицы 5.

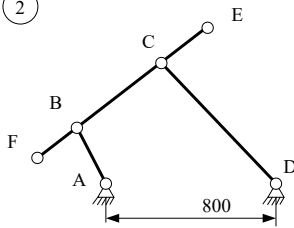
Вариант	№ схем	Угол наклона входного звена АВ для каждого из четырех положений			
		1	2	3	4
49	25	30	120	210	300
50	25	60	150	240	330
51	26	30	120	210	300
52	26	60	150	240	330
53	27	30	120	210	300
54	27	60	150	240	330
55	28	30	120	210	300
56	28	60	150	240	330
57	29	30	120	210	300
58	29	60	150	210	330
59	30	30	120	240	300
60	30	60	150	210	330
61	31	30	120	240	300
62	31	60	150	210	330
63	32	30	120	240	300
64	32	60	150	210	330
65	33	30	120	240	300
66	33	60	150	210	330
67	34	30	120	240	300
68	34	60	150	210	330
69	35	30	120	240	300
70	35	60	150	210	330
71	36	30	120	240	300
72	36	60	150	210	330

1



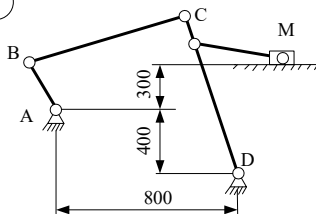
$AB=800$, $BD=1200$, $BC=700$,
 $CD=700$, $DE=1200$, $AE=1400$
 $n=210$ об/мин

2



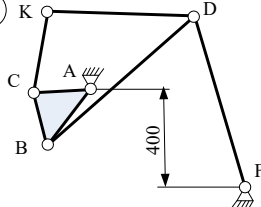
$AB=400$, $BC=1000$, $CD=1000$,
 $BF=400$, $CE=1400$ $n=180$ об/мин

3



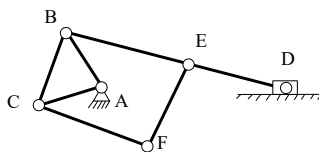
$AB=200$, $BC=700$, $CD=1000$,
 $KD=800$, $KM=600$ $n=200$ об/мин

4



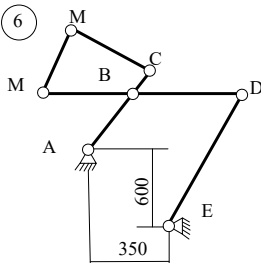
$AB=300$, $AC=200$, $BC=200$,
 $CK=700$, $DB=900$, $KD=600$,
 $DF=900$, $AF=800$ $n=150$ об/мин

5



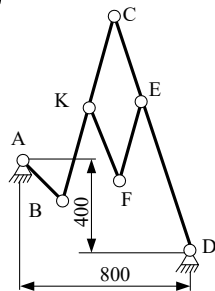
$AB=250$, $AC=250$, $BC=250$,
 $BD=1000$, $BE=500$, $EF=500$,
 $CF=500$ $n=210$ об/мин

6

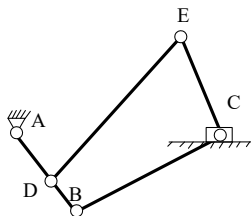


$AB=200$, $BC=200$, $BD=500$, $BM=400$,
 $MF=400$, $CF=400$, $DE=800$ $n=240$ об/мин

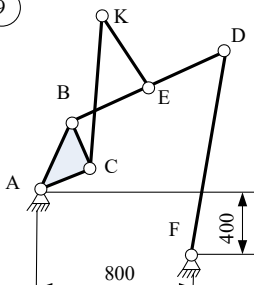
Рис.26. Кинематические схемы механизмов



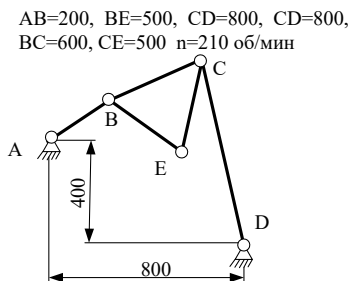
AB=250, BC=700, BK=350, CD=1000, AB=250, BC=1000, AD=150, DE=600,
CE=300, KF=500, FE=500 $n=500$ об/мин $\overline{EC}=600$ $n=210$ об/мин



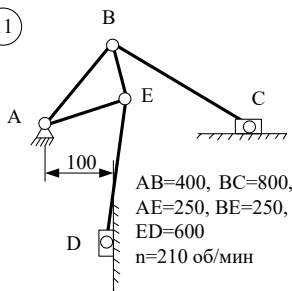
AB=250, BC=1000, AD=150, DE=600,
EC=600 n=210 об/мин



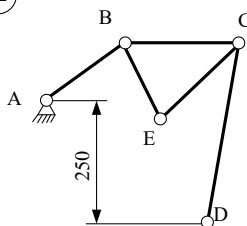
AB=300, BC=200, FD=900, CK=500,
AC=200, BD=900, BE=450, EK=500
n=180 об/мин



AB=200, BE=500, CD=800, CD=800,
BC=600, CE=500 $n=210$ об/мин

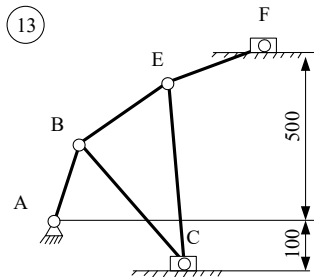


AB=400, BC=800,
AE=250, BE=250,
ED=600
n=210 об/мин

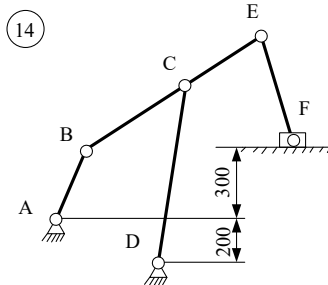


AB=300, BC=700, CD=500, AD=800,
BE=400, CE=400 $n=180$ об/мин

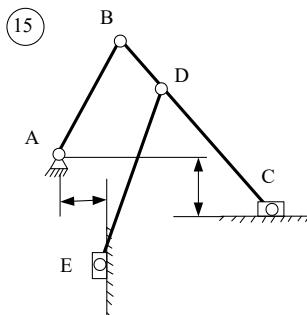
Рис.27. Кинематические схемы механизмов



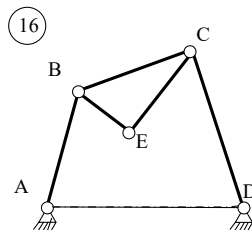
AB=300, BE=500, FE=500, CB=800
, EC=600 $n=180$ об/мин



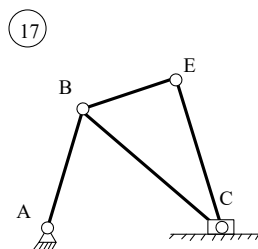
AB=200, DC=700, FE=800, CB=800,
EC=300, AD=700 $n=300$ об/мин



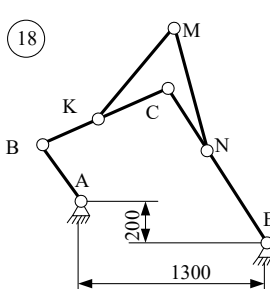
AB=300, BD=200, BC=700, DE=500,
EC=400, AD=800 $n=270$ об/мин



AB=300, BC=600, CD=700, BE=400,
EC=400, AD=800 $n=240$ об/мин



AB=250, BC=700, BE=400, CE=400,
 $n=150$ об/мин



AB=300, BC=900, BK=450, CN=600,
MN=750, CE=1200 $n=140$ об/мин

Рис.28. Кинематические схемы механизмов

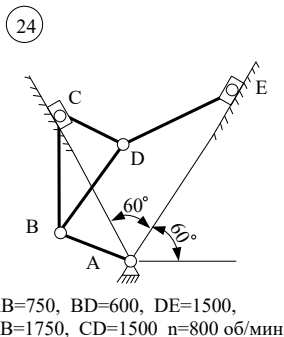
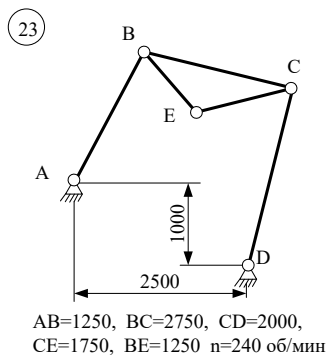
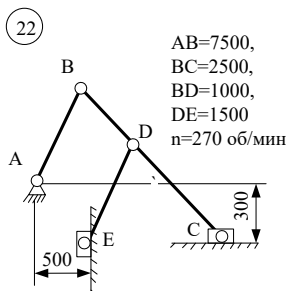
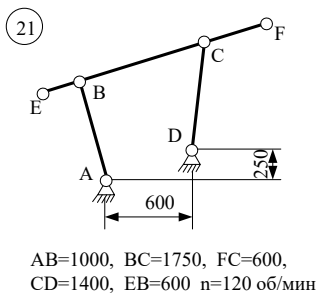
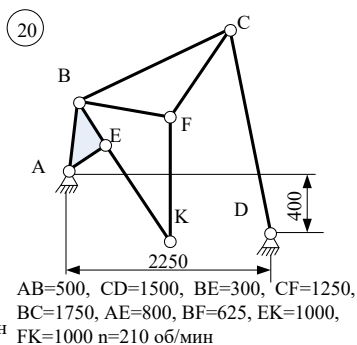
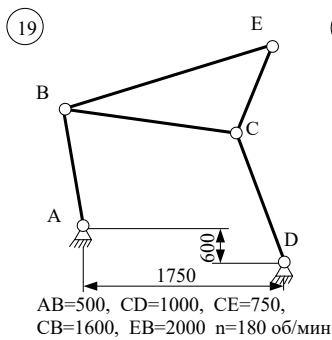


Рис.29. Кинематические схемы механизмов

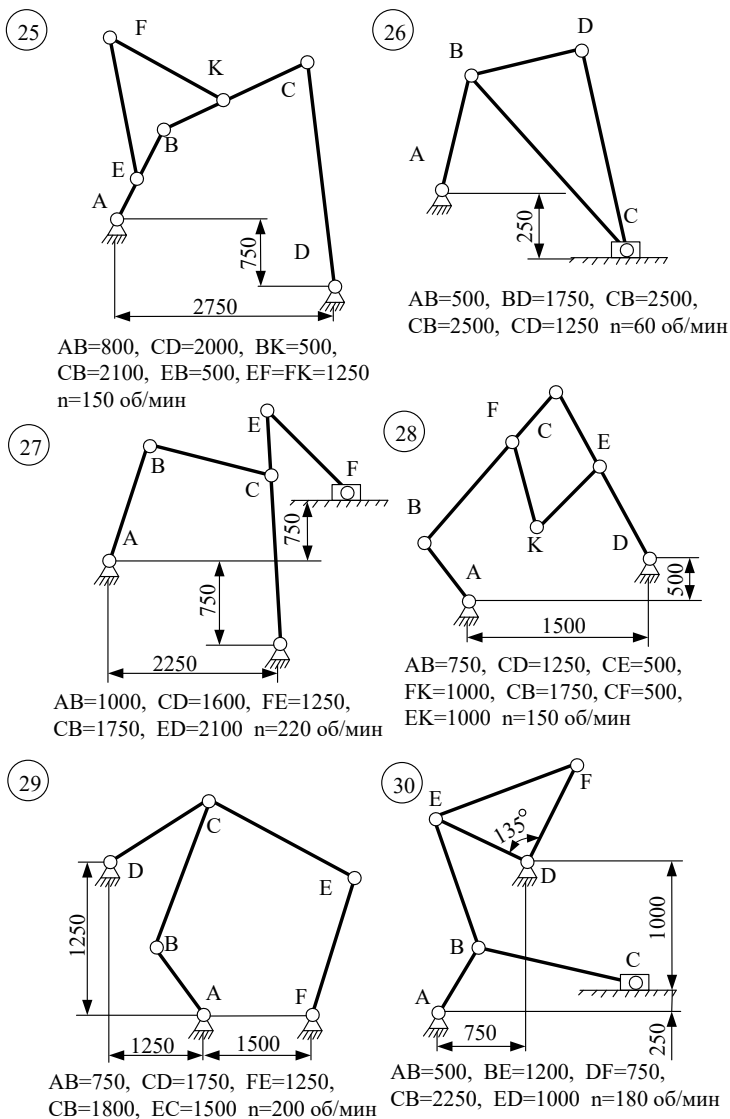


Рис.30. Кинематические схемы механизмов

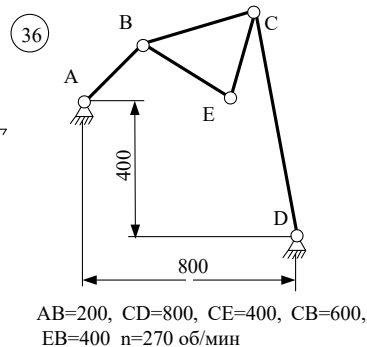
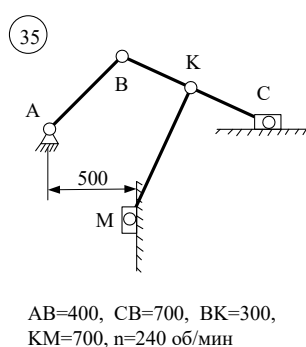
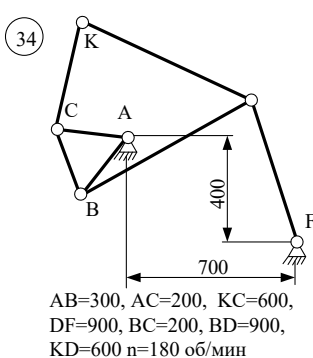
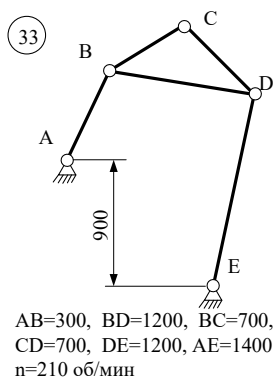
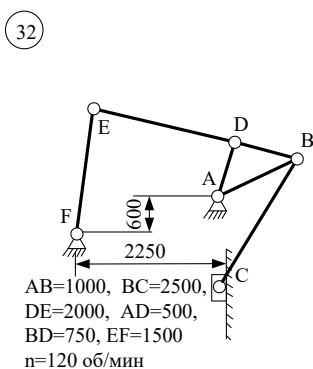
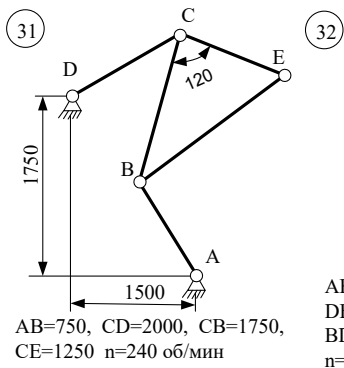


Рис.31. Кинематические схемы механизмов

5. Список литературы

1. Тарг С.М.. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2001.
2. Артоболевский И.И.. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988.
3. Феодосьев В.И.. Сопротивление материалов. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2001.
4. Левитский Н.И.. Теория механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 1989.
5. Маркузон И.А.. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ по курсу «Прикладная механика». –М.: Высшая инженерно-техническая школа МВД РФ, 1994.

Топорова Ева Александровна

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Учебно - методическое пособие
для курсантов, студентов и слушателей
очной и заочной форм обучения
по специальностям 280104.65 и 280104.65

Редактор Ю.В. Шмелева

Подписано в печать 15.03.2011
Формат 60х84 1/16. Бумага писчая.
Тираж 50 экз. Заказ № 18

Отделение организации научных исследований
Ивановского института ГПС МЧС России
153040, г. Иваново, пр. Строителей, 33