

2 Лекция №2 Растяжение и сжатие

2.1 Напряжения и деформации при растяжении-сжатии

Рассмотрим стержень, нагруженный сосредоточенной силой F . До нагружения его длина была равна l , а после нагружения она изменилась на Δl .

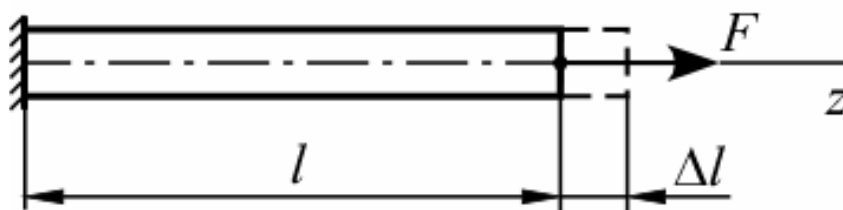


Рис. 2.1 – Расчетная схема растяжение сжатие

Определим напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня, для этого рассмотрим три стороны задачи.

1. Статическая сторона задачи.

В данном случае нагружения возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N , интегральное уравнение равновесия можно записать в виде:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad (2.1)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Введем следующую гипотезу: сечения плоские и недеформированные до приложения внешней нагрузки остаются такими же и после приложения внешней силы, перемещаясь под действием ее параллельно поступательно (гипотеза плоских сечений, или гипотеза Бернулли).

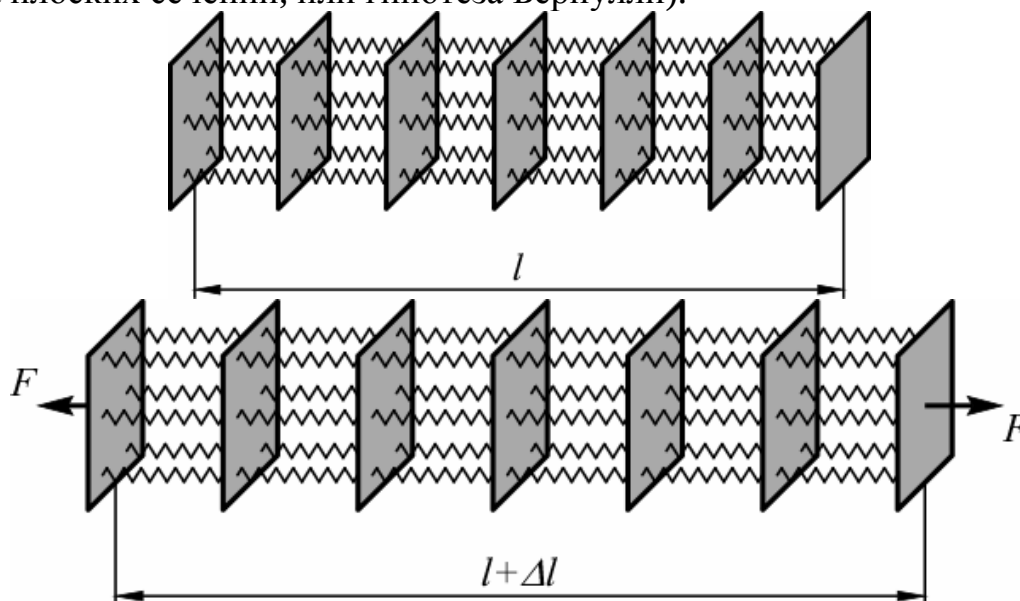


Рис. 2.2 – Геометрическая модель деформирования

Следовательно, каждое продольное волокно (стержень с бесконечно малым поперечным сечением), составляющее заданный стержень, деформируется одинаково, то есть абсолютная деформация и относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const} \quad (2.2)$$

3. Физическая сторона задачи.

Запишем закон Гука в напряжениях и деформациях:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.3)$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга) – физическая константа материала, измеряемая в единицах напряжения¹.

Подставим выражение (2.3) в формулу (2.1):

$$N = \int_A E \cdot \varepsilon dA \quad (2.4)$$

С учетом соотношения (2.2):

$$N = E \cdot \varepsilon \int_A dA = E \cdot \varepsilon \cdot A \quad (2.5)$$

откуда относительная и абсолютная деформация

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}. \quad (2.6)$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (2.7)$$

Таким образом, напряжение в поперечных сечениях стержня

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{N}{EA} = \frac{N}{A}. \quad (2.8)$$

¹ E — модуль упругости при растяжении (модуль упругости 1-го рода или модуль Юнга) [МПа]. Для основных марок стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для меди $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа, для алюминия $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

При растяжении стержня он "утоняется", его ширина — a уменьшается на поперечную деформацию — Δa (Рис. 2.3).

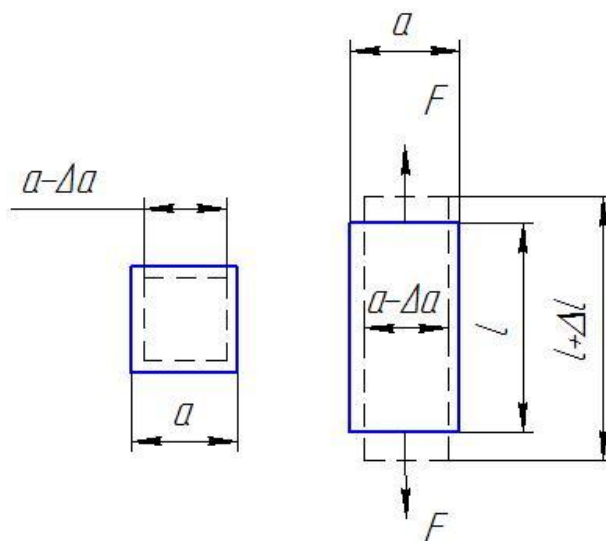


Рис. 2.3 – Поперечные деформации

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (2.9)$$

Коэффициент Пуассона [безразмерная величина μ ²] характеризует зависимость поперечной деформации от продольной и рассчитывается по формуле

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Если продольная сила и поперечное сечение не постоянны, то удлинение стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{E \cdot A(z)} dz. \quad (2.11)$$

Работа при растяжении:

$$A = \frac{N \cdot \Delta l}{2}. \quad (2.12)$$

Изменение потенциальной энергии рассчитывается по формуле

² μ лежит в пределах от 0 (пробка) до 0,5 (каучук); для стали $\mu \approx 0,25 \div 0,3$.

$$U = A = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}. \quad (2.13)$$

2.2 Учет собственного веса стержня

При учете собственного веса продольная сила рассчитывается по формуле

$$N(z) = P + \gamma \cdot A \cdot L. \quad (2.14)$$

P — сила, действующая на стержень, γ — удельный вес. Максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \gamma \cdot l. \quad (2.15)$$

Деформация стержня рассчитывается по формуле

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E}. \quad (2.16)$$

Условие прочности при растяжении (сжатии)

$$\sigma_{\max} \leq \begin{matrix} \sigma_{\text{раст}} \\ \sigma_{\text{сж}} \end{matrix} \quad (2.17)$$

$[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение (сжатие)³.

2.3 Испытания материалов на растяжение-сжатие

Испытание на растяжение производится на образцах двух типов: цилиндрических и плоских.

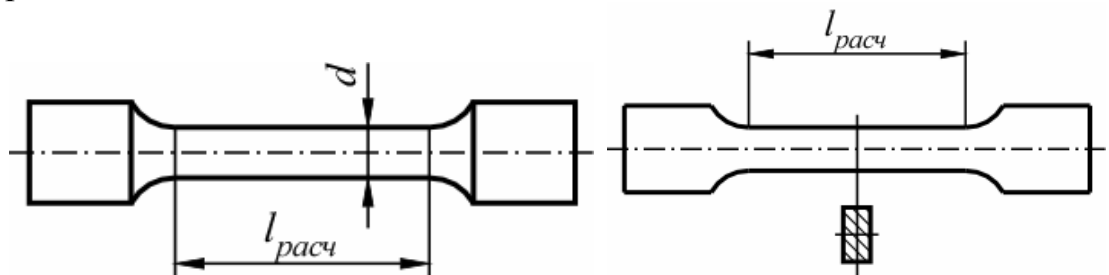


Рис. 2.4 – Геометрические размеры образцов.

³ у чугуна $[\sigma_{\text{раст}}] \neq [\sigma_{\text{сж}}]$, у стали и др. пластичных материалов $[\sigma_{\text{раст}}] = [\sigma_{\text{сж}}]$.

Цилиндрические образцы могут быть нормальные с расчетной длиной $l_{расч}=10d$ и укороченные с $l_{расч}=5d$. Для плоских образцов при вычислении расчетной длины образца используется диаметр круга, равновеликого поперечному сечению рабочей части образца.

В процессе растяжения, реализуемого на специальных испытательных машинах, автоматически записывается диаграмма испытания в координатах сила – удлинение. Для малоуглеродистой стали эта диаграмма выглядит следующим образом:

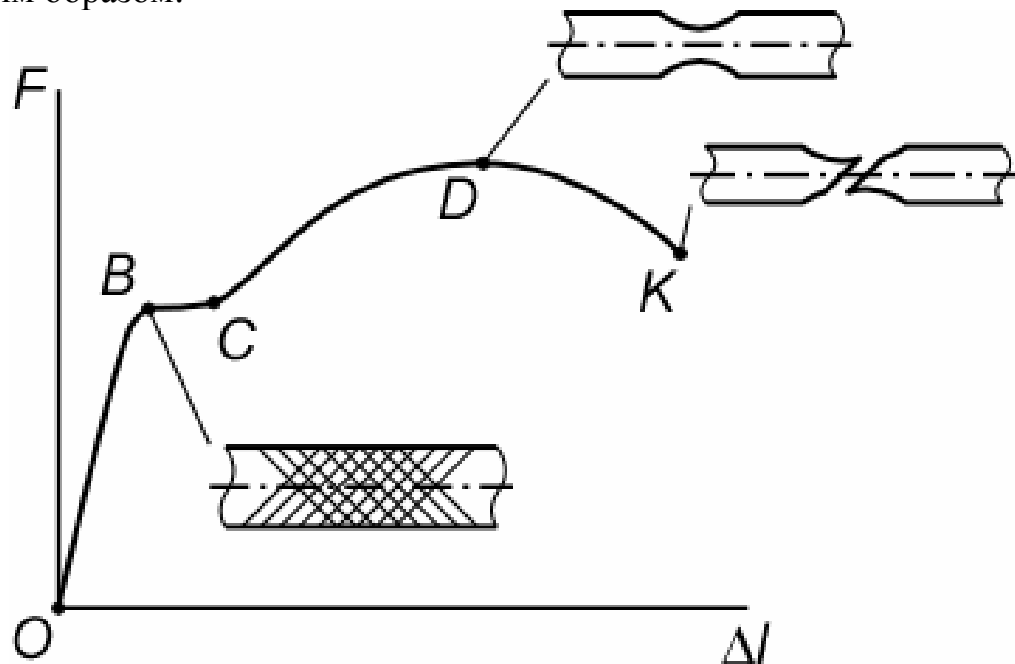


Рис. 2.5 – Типовая диаграмма растяжения

Рассмотрим основные участки диаграммы.

ОВ – участок упругости.

После нагружения в пределах этого участка образец возвращается в исходное состояние. Такая деформация, полностью исчезающая после разгрузки, называется упругой. Механизм упругой деформации – изменение расстояния между атомами.

ВС – участок общей текучести (площадка текучести).

На этом участке на поверхности образца появляется сетка линий, направленных под углом приблизительно 45° к оси растяжения – линии Чернова-Людерса. Эти линии свидетельствуют о появлении нового механизма деформации, заключающегося в сдвиге атомных слоев друг относительно друга. Из-за этих сдвигов после разгрузки образец не возвращается в исходное состояние, приобретая остаточную, или пластическую, деформацию. Пластическая деформация сопровождается нагревом образца, изменением его электропроводности и магнитных свойств, а также акустическим излучением.

CD – участок упрочнения.

Пластическая деформация изменяет внутреннюю структуру материала, в результате чего образец снова проявляет сопротивление деформированию, и растягивающая сила повышается.

ДК – участок местной текучести.

Точка D диаграммы соответствует появлению на образце локального сужения – шейки. Дальнейшая деформация локализуется в этой области, и за счет уменьшения площади поперечного сечения необходимая для растяжения сила снижается. Точка К соответствует разделению образца на части. Разрыв происходит в самом тонком месте шейки.

Чтобы исключить влияние геометрических размеров образца, рабочая диаграмма перестраивается в условную (в координатах напряжение – деформация):

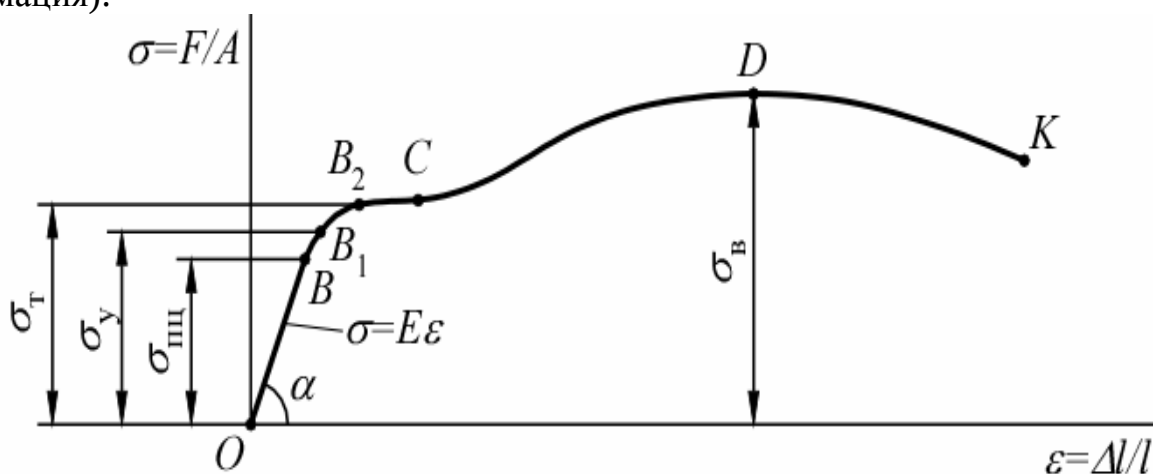


Рис. 2.6 – Условная диаграмма растяжения

Полученная диаграмма называется условной потому, что при вычислении напряжения и деформации сила и удлинение относятся не к действительным, а к начальным значениям соответственно площади поперечного сечения и длины образца.

На условной диаграмме выделяют следующие характерные точки:

$\sigma_{пл}$ — предел пропорциональности: максимальное напряжение, до которого справедлив закон Гука (т.е. наблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и деформацией);

σ_y — предел упругости: максимальное напряжение, до которого в материале не возникает пластических деформаций;

σ_T — предел текучести: напряжение, при котором наблюдается рост деформации при постоянном напряжении;

σ_B — предел прочности (или временное сопротивление разрыву): максимальное напряжение, которое может выдержать образец без разрушения.

В момент разрыва истинное напряжение, отнесенное к действительной площади сечения, существенно выше предела прочности.

За пределами участка упругости в любой точке диаграммы полная деформация $\epsilon_{полн}$ состоит из упругой $\epsilon_{упр}$ и пластической $\epsilon_{пл}$ составляющих:

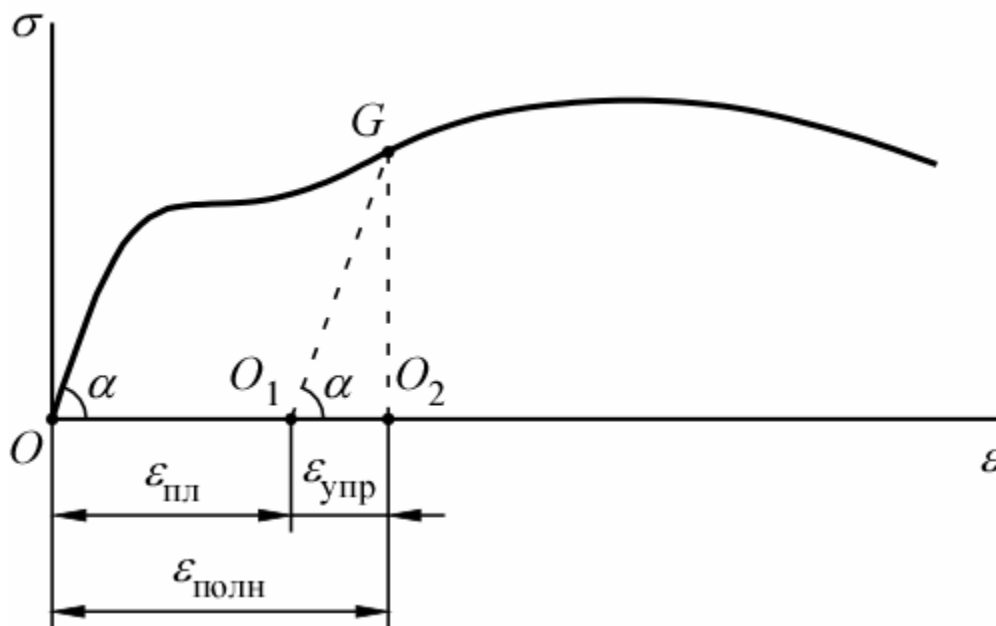


Рис. 2.7 – Составляющие деформации

Если прекратить нагружение в точке G и снять нагрузку, то разгрузка произойдет по закону Гука, т.е. по линии, параллельной участку упругости (отрезок GO_1). Таким образом, отрезок OO_1 определяет величину остаточной деформации образца, а отрезок O_1O_2 – величину упругой деформации на момент разрыва

2.4 Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов, определяемые при растяжении, можно разделить на три группы.

2.4.1 Характеристики упругих свойств.

Модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Модуль Юнга характеризует жесткость материала (физический смысл) и равен тангенсу угла наклона участка упругости OB (Рис. 2.6) условной диаграммы к оси абсцисс $E = \operatorname{tg} \alpha$ (геометрический смысл).

Коэффициент Пуассона.

Удлинению стержня при растяжении в продольном направлении сопутствует сжатие в поперечном направлении:

Коэффициент Пуассона изменяется от 0 (для пробки) до 0,5 (для резины). Для основных марок стали $\mu = 0,25$ ч $0,35$.

Иногда к характеристикам упругости относят также предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ (Рис. 2.6) и предел упругости σ_y (Рис. 2.6).

2.4.2 Характеристики прочности:

- предел текучести σ_T (Рис. 2.6),
- предел прочности σ_B (Рис. 2.6).

Если диаграмма растяжения не имеет площадки текучести, то определяют условный предел текучести $\sigma_{0,2}$ – напряжение, соответствующее величине остаточной деформации 0,2%.

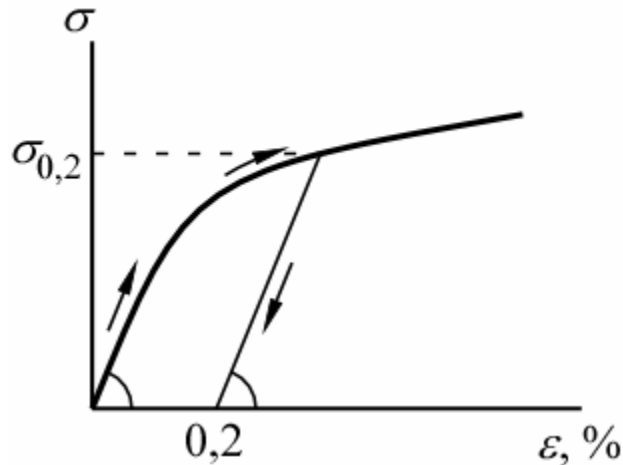


Рис. 2.8 – Предел текучести $\sigma_{0,2}$

Для некоторых материалов величину условного предела текучести определяют при остаточной деформации 0,5% ($\sigma_{0,5}$). Используется также понятие условного предела упругости $\sigma_{0,001}$ или $\sigma_{0,005}$ – напряжение, соответствующее величине остаточной деформации 0,001% или 0,005%.

2.4.3 Характеристики пластичности.

Относительное остаточное удлинение при разрыве:

$$\delta = \frac{l_k - l_o}{l_o} \cdot 100\%. \quad (2.18)$$

где l_o – начальная длина образца (до испытания), l_k – конечная длина образца (после разрушения).

Относительное остаточное удлинение при разрыве можно определить непосредственно по диаграмме растяжения, проведя из точки разрыва линию, параллельную участку упругости, до пересечения с осью абсцисс (отрезок OL):

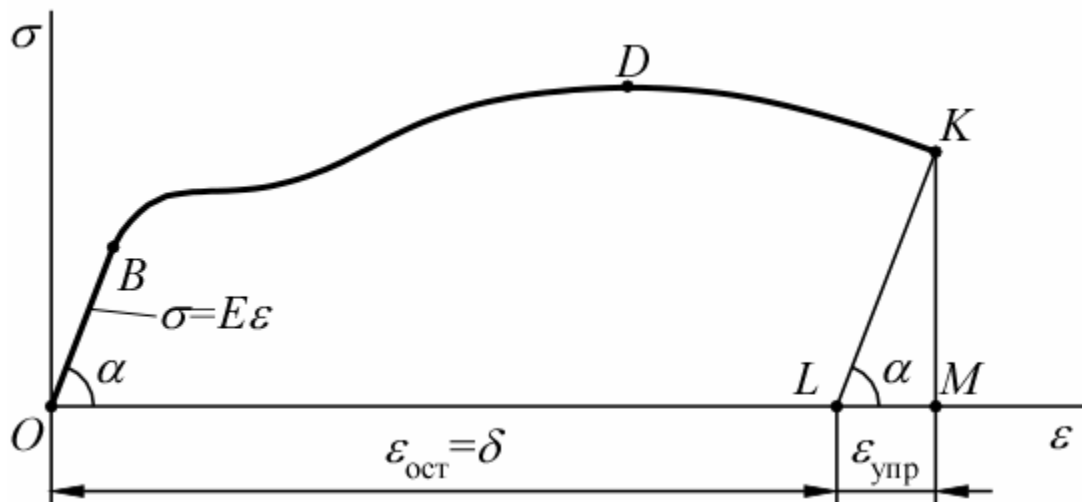


Рис. 2.9 – Определение остаточного удлинения

Относительное остаточное сужение при разрыве:

$$\psi = \frac{A_o - A_{ш}}{A_o} \cdot 100\%. \quad (2.19)$$

где A_o и $A_{ш}$ – площадь поперечного сечения рабочей части соответственно до и после испытания (в месте образования шейки).

2.4.4 Испытание на сжатие

При испытании на сжатие металлов используются цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру 1...3:

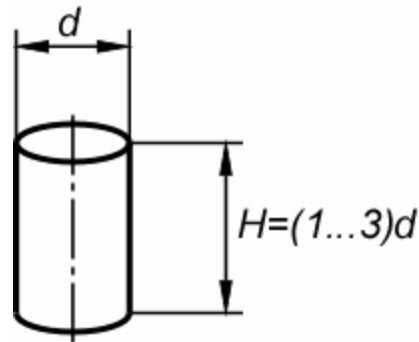


Рис. 2.10 – Образец для испытаний на сжатие

Для строительных материалов используются кубические образцы с длиной грани 100 или 150 мм.

Испытание на сжатие используется редко в силу того, что между плитами испытательной машины и торцевыми поверхностями образца возникает сила трения, нарушающая одноосное напряженно-деформированное состояние, в результате чего определяемые характеристики прочности не могут использоваться в расчетах на прочность.

По величине относительного остаточного удлинения при разрыве принято различать:

- пластичные материалы – способные получать без разрушения большие остаточные деформации ($\delta > 10\%$);
- хрупкие материалы – способные разрушаться без образования заметных остаточных деформаций ($\delta < 5\%$).

При испытаниях на растяжение:

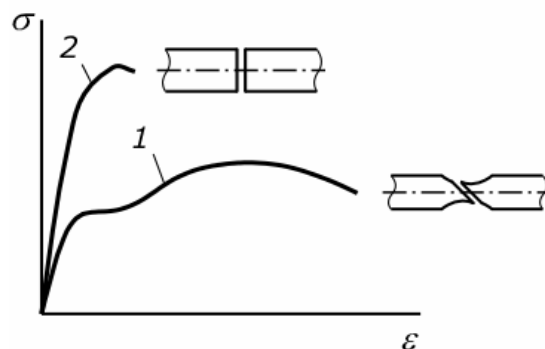


Рис. 2.11 – Испытание пластичных и хрупких материалов

- 1 – пластичный материал;
- 2 – хрупкий материал.

Пластичные материалы перед разрывом образуют заметную шейку, а разрушение происходит под углом примерно 45° к оси растяжения (последнее хорошо видно на плоских образцах). Хрупкие материалы разрушаются по плоскости, нормальной оси растяжения, практически без образования шейки.

Для пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии равны друг другу: $\sigma_{тр} \approx \sigma_{тс}$.

Для хрупких материалов предел прочности при растяжении меньше, чем при сжатии: $\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$.

Существует группа материалов, которые способны при растяжении воспринимать большие нагрузки, чем при сжатии. Это в основном волокнистые материалы, а из металлов – магний. Такое явление называется анизотропией механических свойств, а металлы анизотропными⁴.

Наклеп. Эффект Баушингера. Гистерезис

Если нагрузить образец до точки G (Рис. 2.12), а затем произвести разгрузку, то при повторном нагружении диаграмма растяжения пойдет по пути O_1GK :

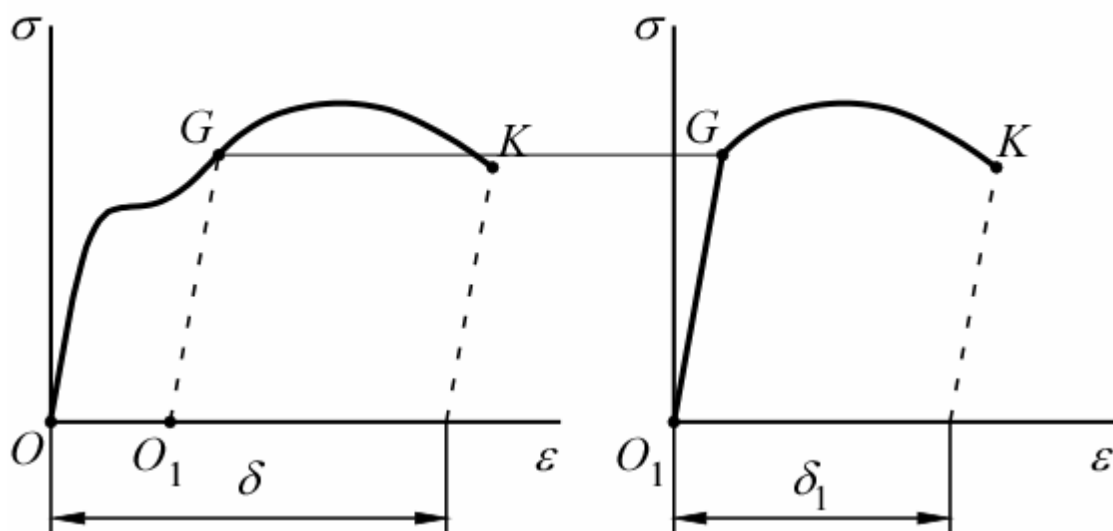
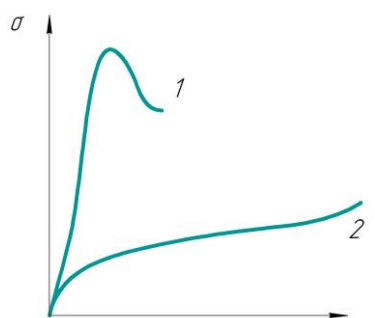


Рис. 2.12 – Явление наклепа

Явление повышения прочностных свойств материала ($\sigma_{пц}$, σ_u и σ_t) и снижения пластических (δ) в результате предварительного нагружения выше предела текучести называется наклепом. (или деформационным



4 Испытание деревянного образца в разных направлениях
1 – дерево вдоль волокон; 2 – дерево поперек волокон.

упрочнением). Если после такого нагружения выдержать образец в течение 100 и более часов, то при этом повышается и предел прочности. Это явление называется естественным старением.

Наклеп может быть частично или полностью устранен термической обработкой.

При сжатии нагружение выше предела текучести, так же, как и при растяжении, вызывает явление наклепа. Однако наклеп, вызванный растяжением, снижает $\sigma_{\text{пл}}$ и $\sigma_{\text{т}}$ при сжатии. Это явление называется эффектом Баушингера.

Если рассмотреть диаграмму растяжения при большом разрешении по оси деформаций, то станет заметно, что линии разгрузки GO_1 и нагрузки O_1G образуют петлю – петлю гистерезиса:

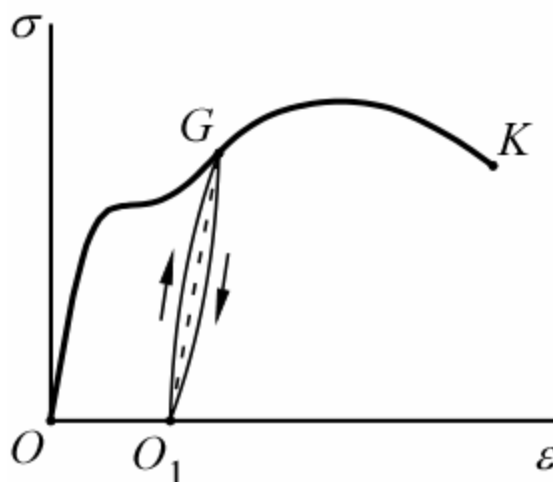


Рис. 2.13 – Явление гистерезиса

Явление гистерезиса можно определить как необратимую потерю энергии деформации. При свободных колебаниях гистерезис является причиной постепенного затухания колебательного процесса. При анализе диаграмм растяжения и сжатия явлением гистерезиса пренебрегают.

2.5 Допускаемые напряжения

Детали машин и других конструкций должны удовлетворять условиям прочности и жесткости, т.е. под действием приложенных нагрузок они не должны разрушаться и получать недопустимые деформации. В большинстве машиностроительных конструкций не допускаются, как правило, остаточные деформации.

Допускаемое напряжение рассчитывается по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}. \quad (2.20)$$

где, σ_0 — опасное напряжение, n — коэф. запаса прочности. Для пластичных материалов $\sigma_0 = \sigma_{\text{т}}$ и $n = 1,5$, хрупких $\sigma_0 = \sigma_{\text{в}}$, $n = 3$.

Значение коэффициента запаса прочности зависит от многих факторов, из которых основными являются:

- состояние материала (хрупкое или пластичное);
- характер приложения нагрузки (статическая, динамическая или повторно-переменная);
- неоднородность материала;
- неточность задания величин внешних нагрузок;
- приближенность расчетных схем и некоторая приближенность расчетных формул;
- долговечность и значимость конструкции.

2.6 Напряженное и деформированное состояние

Различают три вида напряженного состояния:

- 1) линейное напряженное состояние — растяжение (сжатие) в одном направлении;
- 2) плоское напряженное состояние — растяжение (сжатие) по двум направлениям;
- 3) объемное напряженное состояние — растяжение (сжатие) по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Рассматривают бесконечно малый параллелепипед (кубик). На его гранях могут быть нормальные σ и касательные τ напряжения. При изменении положения "кубика" напряжения меняются. Можно найти такое положение, при котором нет касательных напряжений см. Рис. 2.14.

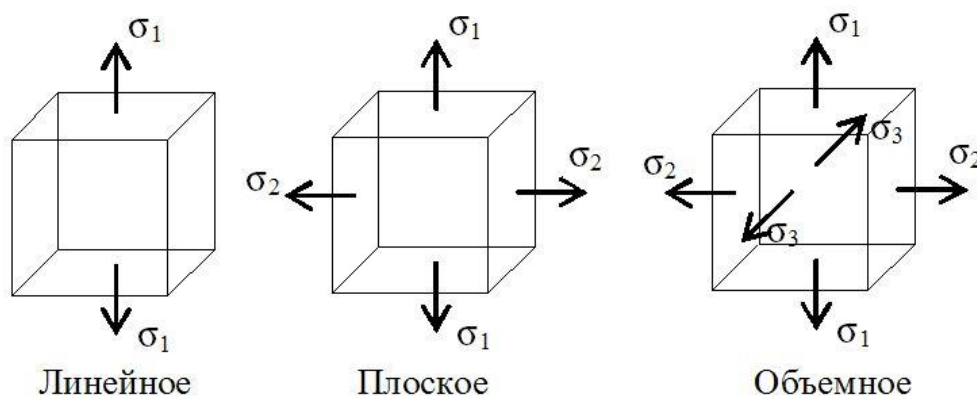


Рис. 2.14 – Виды напряженного состояния.

Площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются главными площадками, а нормальные напряжения на этих площадках — главными напряжениями.

Главные напряжения обозначают: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

2.6.1 Линейное напряженное состояние

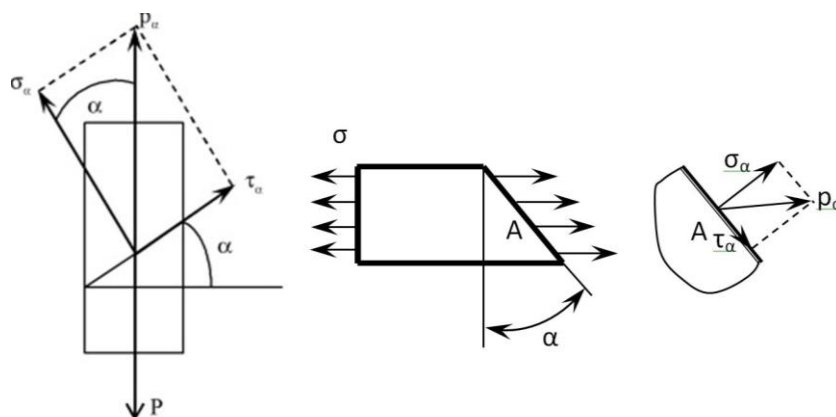


Рис. 2.15 – Линейное напряженное состояние

Напряжения по наклонной площадке вычисляются по формуле:

полное:

$$p_{\alpha} = \frac{P}{A_{\alpha}} = \frac{P}{A} \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \quad (2.21)$$

нормальное:

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad (2.22)$$

касательное:

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (2.23)$$

где A_{α} — площадь наклонной площадки.

Нормальные напряжения σ_{α} положительны, если они растягивающие; касательные напряжения τ_{α} положительны, если они стремятся повернуть рассматриваемый элемент (нижняя часть) по часовой стрелке (на рис. все положительно). Наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам перпендикулярным к оси стержня ($\alpha=0$, $\cos \alpha=1$, $\max \sigma_{\alpha} = \sigma = P/A$, $\tau_{\alpha}=0$).

На площадках, наклонённых под углом 45° , имеем

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{(\sqrt{2})^2} = \frac{P}{2A}; \quad (2.24)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45) = \frac{\sigma}{2}. \quad (2.25)$$

т.е. нормальные напряжения равны касательным. Касательные напряжения будут наибольшими.

На продольных площадках, т.е. при $\alpha=90^{\circ}$.

Нормальные и касательные напряжения будут иметь наименьшее значение ($\alpha=90^{\circ}$, $\cos \alpha=0$, $\sigma_{\alpha}=0$, $\sin 2\alpha=0$, $\tau_{\alpha}=0$).

На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине (Рис. 2.16).

$$\tau_{\alpha} = \tau_k + 90^{\circ},$$

так как

$$\left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) \right|$$

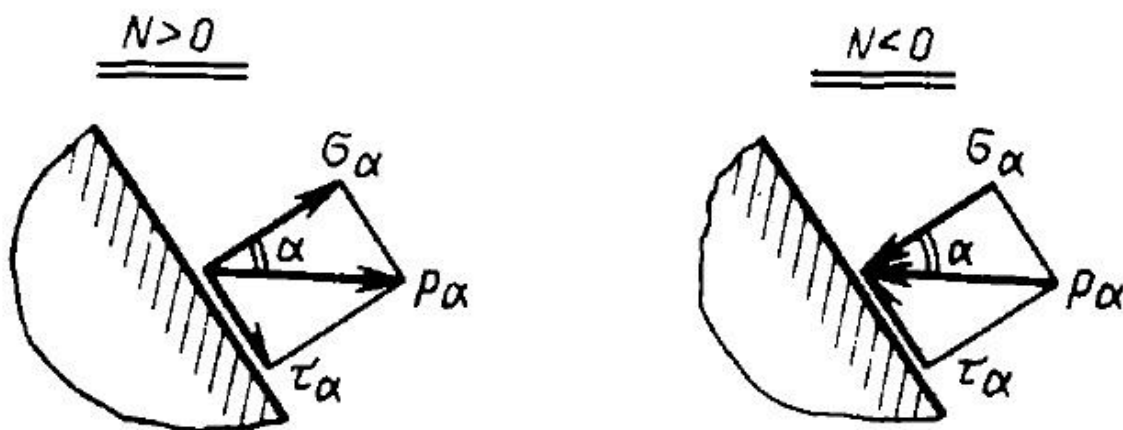


Рис. 2.16 – Варианты действия напряжений

2.6.2 Плоское напряженное состояние

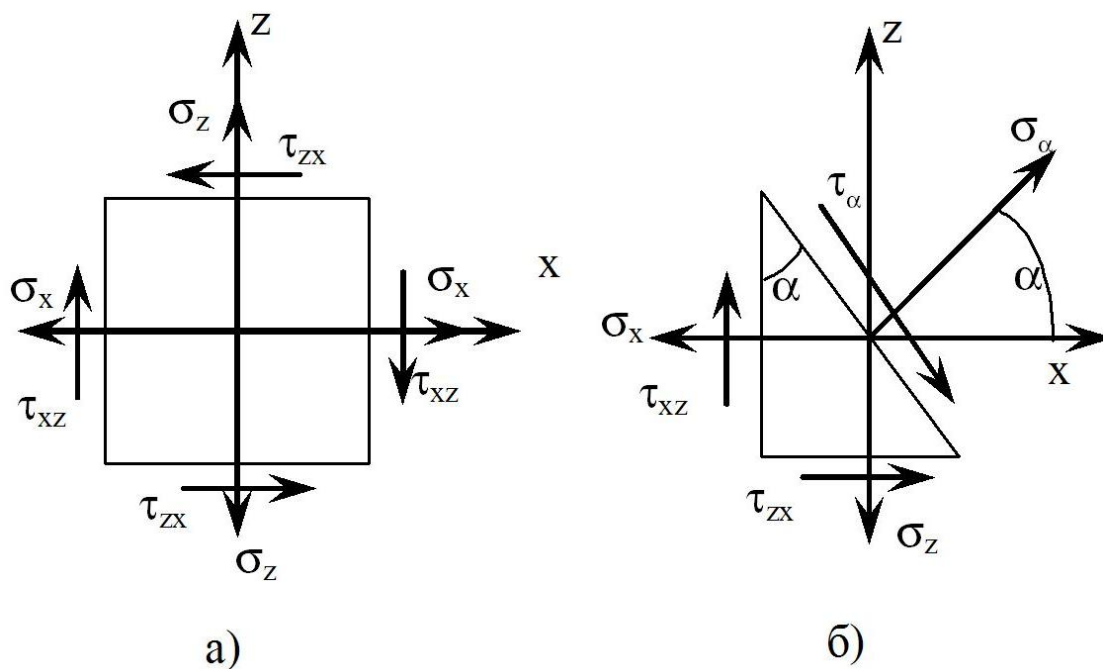


Рис. 2.17 – Плоское напряженное состояние

Разрежем элементарный параллелепипед (Рис. 2.17а) наклонным сечением. Изображаем только одну плоскость. Рассматриваем элементарную треугольную призму (Рис. 2.17б). Положение наклонной площадки определяется углом α . Если поворот от оси x против час.стр. (см. Рис. 2.17б), то $\alpha > 0$.

Нормальные напряжения имеют индекс, соответствующий оси их направления. Касательные напряжения, обычно, имеют два индекса: первый соответствует направлению нормали к площадке, второй — направлению самого напряжения⁵.

Нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее, касательное напряжение положительно, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть элемента относительно внутренней точки по час.стр. Напряжения на наклонной площадке:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (2.26)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha \quad (2.27)$$

или
$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (2.28)$$

Закон парности касательных напряжений: если по площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку. ($\tau_{xz} = -\tau_{zx}$)

В теории напряженного состояния различают две основные задачи.

Прямая задача. По известным главным напряжениям: $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ требуется определить для площадки, наклоненной под заданным углом (α) к главным площадкам, нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (2.29)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (2.30)$$

или
$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (2.31)$$

Для перпендикулярной площадки:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (2.32)$$

⁵ Встречаются и другие обозначения, и другой выбор осей координат, что приводит к изменению знаков в некоторых формулах

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (2.33)$$

Откуда видно, что $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2$ — сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам инварианта (независима) по отношению к наклону этих площадок.

Как и в линейном напряженном состоянии максимальные касательные напряжения имеют место при $\alpha = \pm 45^\circ$, т.е. по площадкам, наклоненным к главным площадкам под углом 45° .

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.34)$$

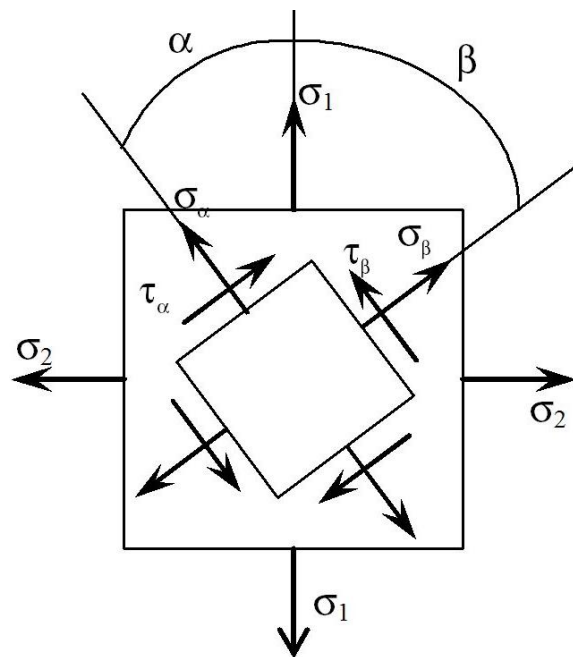


Рис. 2.18 – Первая задача напряженного состояния

Обратная задача. По известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, найти главные (max и min) напряжения и положение главных площадок.

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (2.35)$$

(касательные напряжения по главным площадкам равны 0).

Угол α_0 , определяющий положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad (2.36)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} \quad (2.37)$$

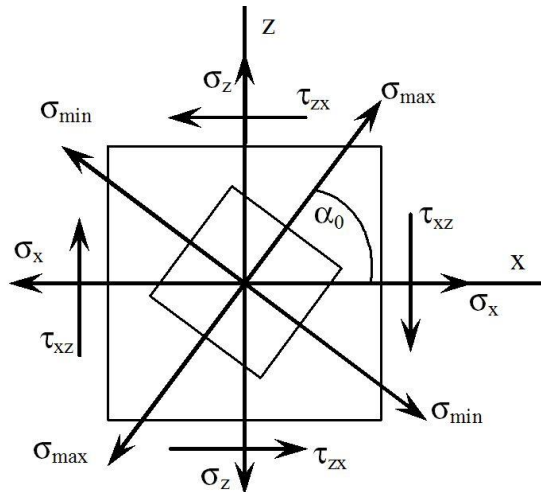


Рис. 2.19 – Вторая задача напряженного состояния

Если одно из главных напряжений окажется отрицательным, то их надо обозначать σ_1, σ_3 , если оба отрицательны, то σ_2, σ_3 .

2.6.3 Круг Мора(круг напряжений)

Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках. Откладываем от оси σ из центра C луч под углом 2α ($\alpha > 0$, то против час.стр.), находим точку D , координаты которой: $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Можно графически решать как прямую, так и обратную задачи.

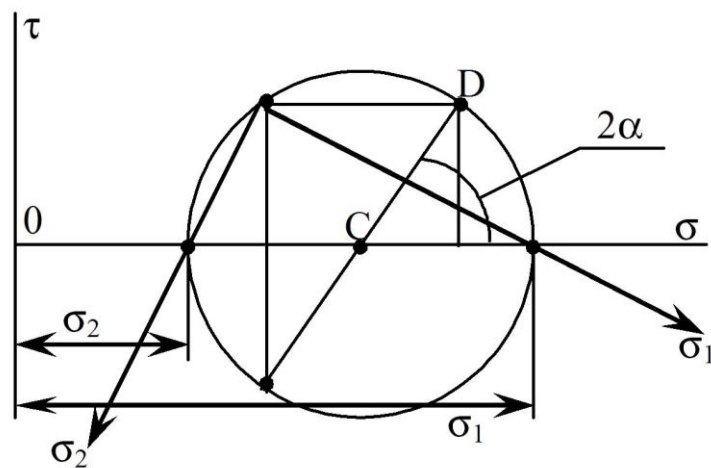


Рис. 2.20– Круг Мора.