**ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ**

**ФИНАНСОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА**

## 

## 3.1. Базовые понятия финансовой математики

Простейшим видом финансовой сделки является предоставление в долг некоторой суммы (*PV*) с условием, что через некоторое время (*t*) будет возвращена большая сумма (*FV*).

*PV*(present value) – величина первоначальной суммы (текущая сумма) или сумма, получаемая заемщиком.

*t*– промежуток времени, за который начисляются проценты (период начисления), который исчисляется количеством лет **(n**) или дней **(δ)**. Он может разбиваться на интервалы начисления. Интервал начисления – это минимальный период времени, по прошествии которого происходит начисление процентов. Например, если период начисления – 10 лет, а интервал начисления – 1 год, то проценты будут начисляться ежегодно в течение 10 лет.

*FV*(future value) – наращенная сумма или сумма, которая должна быть возвращена заемщиков кредитору.

Результативность данной сделки можно измерить двумя способами:

1. оценка прироста первоначальной суммы (*PV*) по сравнению с наращенной суммой (*FV*) с помощью абсолютного показателя:

*I = FV – PV*,

где *I* – сумма процентных денег.

1. оценка прироста первоначальной суммы (*PV*) по сравнению с наращенной суммой (*FV*) с помощью относительных показателей:

;

;

*D = FV – PV.*

где *i* – процентная ставка (ставка ссудных процентов); *d*– учетная ставка; *D* – дисконт.

Как видно из формул, приведенных выше, существуют два способа оценки результативности финансовой сделки с помощью относительных показателей. В первом случае абсолютная сумма разности между наращенной и первоначальной суммой – сумма процентных денег (*I*) – относится к величине первоначальной суммы (*PV*). Полученный показатель (*i*) носит название ставка ссудных процентов.

Во втором случае абсолютная сумма разности между наращенной и первоначальной суммой обозначается иначе (*D*), называется «дисконт» и относится к наращенной сумме (*FV*). Полученный показатель (*d*) называется учетной ставкой процентов.

Таким образом, существуют два способа начисления процентов:

1) декурсивный – сумма процентных денег начисляется и уплачивается в конце периода начисления, величина процентной ставки определяется исходя из величины суммы, полученной заемщиком (*PV*). В конце периода кредитования заемщик возвращает кредитору сумму FV = PV + I.

,

где *i*– ставка судного процента.

2) антисипативный – сумма дисконта начисляется и уплачивается в начале каждого периода начисления, поэтому заемщик получает ссуду уже за вычетом начисленных процентов *PV = FV – D*. Процентная ставка называется дисконт и определяется исходя из величины суммы, которую следует возвратить кредитору (*FV*).

.

где *d*– учетная ставка процента.

В процессе финансового управления часто требуется определить величину наращенной суммы *FV*, если известна величина первоначальной суммы и процентная ставка. Такая операция получила название *компаудинг*. Обратная операция, т.е. определение текущей величины суммы *PV*, если известна величина наращенной суммы и процентная ставка называется *дисконтирование*.

## 3.2. Простые ставки процентов

Простые ставки ссудных (декурсивных) процентов

Обозначения:

**i** – годовая ставка;

**PV** – первоначальная сумма денег, которую получает заемщик

**FVn** – наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через n лет;

**FVδ** - наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через δ дней.

**Iг** – годовая сумма процентных денег;

**I** – сумма процентных денег, выплачиваемых за весь период начисления;

**n** – период начисления в годах (δ - в днях)

**К** – временная база расчета (продолжительность года в днях) = {360, 365, 366};

**FVn**

**Кн –** коэффициент наращения **= -------- .**

**PV**

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в **n** лет будет выглядеть следующим образом

**FVn = PV (1 + I х n)**

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в **δ** дней будет выглядеть следующим образом

**δ**

**FVδ = PV (1 + I х ---)**

**К**

где **δ** – количество дней в периоде начисления; **К** – расчетная продолжительность года.

При расчете периода начисления в днях день погашения кредита и день его выдачи считаются как один день.

Коэффициент наращения за n лет, при использовании схемы простых ссудных процентов рассчитывается по формуле

**FVn (1 + I х n)**

**Кн = -------- = ---------------------**

**PV PV**

В зависимости от способа определения продолжительности года используется либо точный, либо обыкновенный процент.

Возможны следующие варианты расчета:

1. точный процент – используется точное число дней в году и точное число дней ссуды (К = 365 или К = 366);
2. обычный процент – используется приблизительное число дней в году (К = 360). При этом возможны два варианта:

а) точное число дней ссуды;

б) приблизительное число дней ссуды, исходя из средней продолжительности полного месяца 30 дней.

Сфера применения простых ссудных процентов: краткосрочные финансовые операции, при которых интервал начисления обычно совпадает с периодом начисления или когда после каждого интервала начисления кредитору уплачивается сумма процентных денег.

Простые учетные ставки процентов

Базой начисления процентов в этом случае является наращенная сумма *FV***.** Эта сумма и считается величиной полученного кредита. Т.к. дисконт в данном случае начисляется в начале каждого интервала начисления, то заемщик получает сумму уже за вычетом начисленного дисконта *PV = FV – D.*

Обозначения:

**d** – учетная ставка;

**Dг** – годовая сумма дисконта;

**D** – сумма дисконта за весь период;

**PV** – первоначальная сумма, которую получает на руки заемщик;

**FVn** – наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через n лет;

**FVδ** - наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через **δ** дней.

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в n лет будет выглядеть следующим образом

**PV**

**FVn = -------------**

**(1 – d х n)**

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в δ дней будет выглядеть следующим образом

**PV**

**FVδ = ----------------**

**δ**

**(1 - ---- х d)**

**К**

Коэффициент наращения за n лет, при использовании схемы простых учетных процентов рассчитывается по формуле

**FVn 1**

**Кн = -------- = ---------------------**

**PV (1 – d х n)**

Сфера применения простых учетных процентов: используются при учете (покупке) векселей и других денежных обязательств.

## 3.3. Сложные ставки процентов

**Сложные ставки ссудных процентов**

Обозначения:

**iс** – годовая ставка сложных ссудных процентов;

**PV** – первоначальная сумма денег, которую получает заемщик

**FVn** – наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через n лет;

**FVδ** - наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через δ дней.

**I** – сумма процентных денег, выплачиваемых за весь период начисления;

**n** – период начисления в годах

**m** – количество интервалов начисления в одном году;

**j** – номинальная ставка сложных ссудных процентов

При использовании схемы сложных ссудных процентов база начисления на каждом интервале начисления включает не только первоначальную сумму *PV*, но и сумму процентных денег (*I*), невостребованных кредитором по прошествии соответствующего интервала начисления, т.е. база начисления сложных процентов постоянно возрастает.

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в n лет будет выглядеть следующим образом

**FVn = PV (1 + ic)n**

Начисление сложных процентов может осуществляться несколько раз в году. В этом случае устанавливается величина годовой процентной ставки (j – номинальная ставка процентов), по которой определяется величина ставки процентов, применяемой на каждом интервале начисления внутри года.

Если число интервалов начисления внутри года равно m, то на каждом интервале начисления величина ставки процентов составит j/m. Таким образом, при сроке ссуды n лет общее число интервалов начисления составит m х n.

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в n лет, если проценты начисляются m раз в году, будет выглядеть следующим образом

**FVn = PV (1 + j/m) mn**

Коэффициент наращения за n лет, при использовании схемы сложных ссудных процентов рассчитывается по формуле

**FVn (1 + ic)n**

**Кн  = -------- = ---------------**

**PV PV**

Сфера применения сложных учетных ставок процентов: большинство финансовых операций, связанных в предоставлением денег в долг. Данная схема является наиболее распространенной в настоящее время.

**Сложные учетные ставки процентов**

Обозначения:

**dс** – ставка сложных учетных процентов;

**D** – сумма дисконта за весь период;

**PV** – первоначальная сумма, которую получает на руки заемщик;

**FVn** – наращенная сумма, которая должна быть возвращена кредитору через **n** лет;

При использовании схемы сложных учетных процентов база начисления (наращенная сумма FVn) будет ежегодно уменьшаться на сумму начисленного дисконта D.

Итоговая формула расчета наращенной суммы за период в **n** лет будет выглядеть следующим образом

**PV**

### **FVn = ----------**

**(1 – dc)n**

## 

## 3.4. Учет инфляции при принятии финансовых решений

Инфляция характеризуется обесценением национальной валюты (снижением ее покупательной способности). Влияние инфляции сказывается на различных аспектах деятельности предприятия:

1. относительное снижение стоимости материальных активов;
2. занижение себестоимости производства продукции;
3. падение реального уровня доходности предприятия;
4. снижение покупательной способности населения, что сказывается на доходности предприятия.

Учет фактора инфляции в управлении различными аспектами деятельности предприятия заключается в необходимости реального отражения стоимости его активов и денежных потоков, а также в возмещении потерянных доходов, вызванных инфляционными процессами при осуществлении финансовых операций.

**Sα** – сумма, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции.

**Δ S = Sα** – **S** – изменение покупательной способности денег в абсолютном выражении.

**Δ S**

**α = ------------** – **темп инфляции.**

**S**

**α** – показатель, характеризующий снижение покупательной способности денег в определенном периоде. Он выражается отношением прироста среднего уровня цен к их базовому уровню на начало периода. Это показатель уровня инфляции.

**Iинфл. = (1 + α)n** – это величина, показывающая, во сколько раз в среднем выросли цены за период времени n, если годовой уровень инфляции равен α.

В условиях инфляции первоначальная сумма (PV) должна превратиться в наращенную сумму FVα, учитывающую инфляцию.

Обозначения:

**iα** – ставка простого ссудного процента, учитывающая инфляцию;

**isα** – ставка сложного ссудного процента, учитывающая инфляцию;

**dα** – ставка простого учетного процента, учитывающая инфляцию;

**jα** – номинальная ставка процента, учитывающая инфляцию.

Учесть сумму инфляционного обесценения денег при расчете наращенной суммы возможно путем умножения наращенной суммы без учета инфляции на индекс инфляции, либо при помощи использования процентных ставок, скорректированных на инфляцию.

Приведем формулы для расчета наращенной суммы, учитывающей инфляцию, а для разных схем начисления

1. Простые ссудные проценты:

**FVα = FVα (1 + i х n) Iинфляции** или **FVα = FVα (1 + iα х n).**

2. Простые учетные проценты:

**PV PV**

**FVα = ------------- х Iинфляции** или **FVα = -----------------.**

**(1 – d х n) (1 – dα х n)**

3.Сложные ссудные проценты:

**FVα = PV (1 + ic)n Iинфляции** или **FVα = PV (1 + icα)n.**

**FVα = PV (1 + j/m)mn\*Iинф** или **PV (1 + jα/m)mn.**

4. Сложные учетные ставки:

**PV PV**

**FVα = ------------- х Iинфляции** или **FVα = -----------------.**

**(1 – dс)n (1 – dcα)n**

## 3.5. Понятие и виды денежных потоков

В большинстве современных коммерческих операций осуществляются не разовые платежи, а последовательность финансовых поступлений или выплат p1, p2, …, pn в течение определенного периода времени.

Примеры: серия поступлений выручки на расчетном счете; последовательные взносы на оплату процентов по кредиту предприятия.

Такая последовательность распределенных во времени поступлений и/или выплат денежных средств получила название денежный поток (поток платежей).

*Основные параметры денежного потока:*

***Pi*** – величина денежных поступлений (выплат) в i-ом периоде (элемент потока). Элементы потока могут быть равными и неравными, зависимыми и независимыми, связанными некоторым алгоритмом.

***i*** – временной период между отдельными поступлениями (выплатами) средств *Pi*. Интервалы могут быть равными или неравными

***направленность потока***: денежные потоки могут быть положительными (все их элементы представляют собой денежные поступления) и отрицательными (все их элементы представляют собой денежные выплаты); однонаправленными (только поступления или только выплаты) и разнонаправленные (и поступления, и выплаты).

***n*** – срок действия потока (*n*). В зависимости от этого потоки бывают ограниченные (срочные) и неограниченные.

***момент поступления (расходования) средств*** в рамках одного временного периода. Если поступление (расходование) средств осуществляется в начале интервала, то такой денежный поток называется *пренумерандо*. Если поступление (расходование) средств осуществляется в конце интервала, то такой денежный поток называется *постнумерандо*.

## 

## 3.6.Оценка денежных потоков

## с неравными поступлениями

Поскольку стоимость денежных средств, поступление (выплата) которых осуществляется в различные моменты времени неравнозначна, при управлении денежными потоками часто возникает необходимость оценки стоимости всех элементов потока (поступлений/выплат) на какой-либо момент времени в будущем, либо оценки стоимости всех элементов потока на текущий момент времени. Такая оценка производится с помощью операций наращения и дисконтирования.

Для целей оценки мы будем рассматривать однонаправленные денежные потоки с равными временными интервалами между отдельными поступлениями/выплатами денежных средств.

Обозначения:

**FVпост** – будущая стоимость денежного потока постнумерандо;

**FVпре** – будущая стоимость денежного потока пренумерандо;

**PVпост** – текущая стоимость денежного потока постнумерандо;

**PVпре** – текущая стоимость денежного потока постнумерандо;

**ic** – ставка наращения/дисконтирования (ставка сложных ссудных процентов);

**Pk** – элемент денежного потока (сумма поступления/выплаты) в i-том периоде.

**1. Оценка будущей стоимости денежного потока постнумерандо**

**с неравными поступлениями**

Будущая стоимость денежного потока постнумерандо **FVпост** равна сумме будущих стоимостей его отдельных элементов **FVк**. Таким образом, будущая стоимость всего денежного потока постнумерандо определяется по формуле:

**n**

**FVпост = ∑ Pk (1 + ic)n-k,**

**k=1**

где к – порядковый номер элемента денежногопотока.

Примером такой оценки может служить оценка наращенной суммы, которая будет на счете в банке при заданной ставке сложных ссудных процентов ic в конце периода начисления, если инвестор в конце каждого года k прибавляет на счет сумму Pk.

**2.Оценка текущей стоимости денежного потока постнумерандо**

**с неравными поступлениями**

Текущая стоимость денежного потока постнумерандо РVпост равна сумме текущих стоимостей его отдельных элементов РVк. Таким образом, текущая стоимость всего денежного потока постнумерандо определяется по формуле:

**n Pk**

**РVпост = ∑ -------------**

**k=1 (1 + ic)k**

Практическим примером определения текущей стоимости денежного потока постнумерандо является определение суммы, которую на сегодняшний момент времени надо вложить в банк, чтобы при ставке iс обеспечить себе возможность снятия со счета в конце очередного года k некоторую сумму Pk.

**3.Оценка будущей стоимости денежного потока пренумерандо**

**с неравными поступлениями**

Будущая стоимость денежного потока пренумерандо FVпре равна сумме будущих стоимостей его отдельных элементов FVк. Таким образом, будущая стоимость всего денежного потока постнумерандо определяется по формуле:

**n**

**FVпост = ∑ Pk (1 + ic)n-k+1**.

**k=1**

**4.Оценка текущей стоимости денежного потока пренумерандо**

**с неравнымипоступлениями**

Текущая стоимость денежного потока постнумерандо РVпост равна сумме текущих стоимостей его отдельных элементов РVк. Таким образом, текущая стоимость всего денежного потока постнумерандо определяется по формуле:

**n Pk**

**РVпре = ∑ -------------**

**k=1 (1 + ic)k-1**

## 3.7. Оценка аннуитетов

Аннуитет– частный случай денежного потока. Название "аннуитет" происходит от лат. annо (год), т.к. в начале рассматривались только ежегодные денежные поступления и выплаты. В настоящее время в качестве периода аннуитета может рассматриваться любой промежуток времени.

Аннуитет (финансовая рента) – поток *однонаправленных* платежей с *равными* интервалами между последующими платежами в течение определенного периода времени. В аннуитетах *все платежи* равны между собой Р1 = Р2 = Р3 = … = Рn = Р.

Обозначения:

**FVпоста** – будущая стоимость аннуитета постнумерандо;

**FVпреа** – будущая стоимость аннуитета пренумерандо;

**РVпоста** – текущая стоимость аннуитета постнумерандо;

**РVпреа** – текущая стоимость аннуитета пренумерандо;

**P** – величина отдельного поступления (платежа) по аннуитету или член ренты;

**ic** – сложная процентная ставка, по которой начисляется процент по аннуитету;

**n** – число платежей (поступлений) по аннуитету.

Период аннуитета – величина постоянного временного интервала между двумя последовательными платежами (поступлениями).

Поскольку аннуитет является частным случаем денежного потока, то для него справедливы все формулы оценки, которые были приведены выше. Учитывая, что в аннуитете все платежи/поступления равны между собой, можно вывести формулы для расчета будущей и текущей стоимости аннуитета.

*Формула расчета будущей стоимости аннуитета постнумерандо:*

**n n**

**FVпостa = ∑Pk (1 + ic)n-k = P ∑(1 + ic)n-k = P \* Kic,n,**

**k=1 k=1**

где Kic,n – коэффициент наращения аннуитета постнумерандо или мультиплицирующий множитель. Значения коэффициентов наращения для различных процентных ставок ic и различных периодов начисления n можно найти в специальных финансовых таблицах.

FVposta = P х Kic,n

Существует формула расчета значений коэффициента наращения, которая позволяет вычислить наращенную сумму аннуитета при отсутствии финансовых таблиц:

**1[(1 + ic)n – 1] (1 + ic)n - 1**

**Kic,n = --------------------- = -----------------**

**(1 + ic) – 1 ic**

*Формула расчета текущей стоимости аннуитета пренумерандо:*

**n Pk n 1**

**PVпоста = P х aic,n**

**PVпоста = ∑ ------- = P ∑ --------- = Р х aic,n**

**k=1 (1 + ic)k k=1 (1 + ic)k**

где aic,n коэффициент дисконтирования аннуитета или дисконтирующий множитель. Значения коэффициентов дисконтирования для различных процентных ставок ic и различных периодов начисления n можно найти в специальных финансовых таблицах.

Существует формула расчета значений коэффициента наращения, которая позволяет вычислить наращенную сумму аннуитета при отсутствии финансовых таблиц.

**1 – (1 + ic)-n**

**aic,n = -----------------**

**ic**

Учитывая, что аннуитеты пренумерандо отличаются от аннуитетов постнумерандо тем, что в них платежи/поступления имеют место в начале каждого интервала начисления, выведем формулы расчета будущей и текущей стоимости аннуитета пренумерандо на основе формул, используемых для расчета стоимости аннуитетов постнумерандо.

*Формула расчета будущей стоимости аннуитета пренумерандо*

**FVпреa = FVпостta (1 + ic) = P х kic,n(1 + ic)**

*Формула расчета текущей стоимости аннуитета пренумерандо*

**PVпре = PVпост (1 + ic) = PVпост х aic,n (1 + ic)**

Экономический смысл коэффициента наращения аннуитета **(kic,n):** коэффициент показывает, чему будет равна наращенная сумма срочного аннуитета постнумерандо с размером платежа в 1 денежную единицу с заданными параметрами ic и n к концу срока его действия.

При этом предполагается, что производятся только начисления процентов, а их изъятие осуществляется по окончании срока аннуитета.

Экономический смысл коэффициента приведения (aic,n): показывает, чему равна с позиции текущего момента стоимость аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере 1 денежной единицы и заданными параметрами ic и n.

*Сфера применения аннуитетов.* Формулы оценки аннуитетов постнумерандо используется для оценки будущей стоимости рентных платежей за пользование имуществом, а также для определения величины капитала, который сегодня следует вложить в банк для получения регулярных выплат в определенном размере в течение некоторого периода времени.

Схема аннуитета пренумерандо используется для исчисления суммы периодических банковских вкладов, которую клиент собирается вносить для накопления к определенному моменту времени достаточной суммы для совершения крупной покупки.