

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

**«Ивановская государственная текстильная академия»
(ИГТА)**

С.М.Иванов, Е.С.Романов, Т.В.Шмелева

Решение статически неопределимых балок
по курсу «Сопротивление материалов»

Рекомендовано научно-методическим советом ИГТА в качестве учебного
пособия для студентов специальностей 260704,
260703, 280102, 260901,
260902, 150406, 150601

Иваново 2011

УДК 539.384

Иванов, С.М. Решение статически неопределимых балок по курсу «Соппротивление материалов»: учебное пособие/С.М.Иванов, Е.С.Романов, Т.В.Шмелева. – Иваново: ИГТА, 2011-40 с.

Настоящее учебное пособие рекомендуется для руководства к решению расчетно-графических, контрольных и домашних задач по курсу «Соппротивление материалов». Предложено 3 метода решения статически неопределимых задач.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 260704 (Технология текстильных изделий), 260703 (Проектирование текстильных изделий), 280102 (Безопасность технологических процессов и производств), 260901 (Технология швейных изделий), 260902 (Конструирование швейных изделий), 150406 (Машины и аппараты текстильной и легкой промышленности), 150601 (Материаловедение и технология новых материалов)

Рецензенты: кафедра машин и аппаратов химических производств
ИГХТУ(зав.кафедрой, д-р техн.наук, проф.
В.Н.Блиничев);
д-р техн.наук, доцент кафедры СМ ИГАСУ
А.А.Краснов.

Научный редактор д-р техн. наук, проф. В.А.Суров

© Ивановская
государственная
текстильная академия, 2011

ВВЕДЕНИЕ

В статически неопределимых балках число опорных реакций превышает число возможных уравнений статики.

Числом статической неопределимости называется разница между числом неизвестных реакций и числом уравнений статики.

Наиболее распространенными способами раскрытия статической неопределимости балок являются:

1. Применение дифференциального уравнения изогнутой оси и его интегрирование – аналитический метод.
2. Использование канонических уравнений – метод сил.
3. Применение теоремы о 3 моментах.

В данном учебном пособии на конкретных примерах приводятся три метода решения статически неопределимых балок, предварительно рассматривается теоретическое обоснование этих методов.

1. БАЛКИ ОДИН РАЗ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ

1.1. Аналитический метод

Аналитический метод предполагает составление приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки на разных участках:

$$y_i'' EJ = M_i,$$

где y_i'' - вторая производная от уравнения изогнутой оси балки на i - м участке,

E - модуль продольной упругости материала балки,

J - осевой момент инерции площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, произведение $EJ = \text{const}$, т.к. подразумевается, что балка изготовлена из одного материала и имеет постоянное поперечное сечение,

M_i – выражение изгибающего момента на рассматриваемом участке балки.

Составив уравнение – написав выражение для изгибающего момента с учетом правила знаков, его надо дважды интегрировать:

$$y' EJ = \int M \cdot dx + c_1,$$

$$y EJ = \int \left(\int M \cdot dx \right) \cdot dx + c_1 x + c_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные при неопределенном интегрировании.

Чтобы постоянные интегрирования на всех участках балки были одинаковыми:

$$c_1^I = c_1^{II} = c_1^{III} = \dots c_1^n = c_1,$$

$$c_2^I = c_2^{II} = c_2^{III} = \dots c_2^n = c_2,$$

необходимо выполнить несколько условий (условия Клебша):

1. Начало координат выбирается на левом или на правом конце балки и не меняется в процессе решения задачи. Если начало координат на левом конце, то ось Y направлена вверх, ось X – направо; если начало координат на правом конце ось Y направлена вверх, ось X – налево.
2. Выражение изгибающего момента записывается для той части балки, где находится начало координат.
3. Интегрировать выражение изгибающего момента, не раскрывая скобок у его слагаемых.
4. Если в выражение изгибающего момента входит пара сил m , это слагаемое надо интегрировать не по x , а по $(x - a)$. Здесь a – расстояние от начала координат до сечения, где приложена пара m . Это слагаемое войдет в дифференциальное уравнение в виде $m \cdot (x - a)^0$.
Здесь a – расстояние от начала координат до сечения, где приложена пара сил m . После первого интегрирования выражение принимает вид $m \cdot (x - a)$, после второго -

$$- m \cdot \frac{(x - a)^2}{2}.$$
5. Если на балку действует распределенная нагрузка, не доходящая до конца балки, противоположного началу координат, ее действие необходимо искусственно продолжить и уравновесить по тому же закону.

При выполнении этих условий постоянные интегрирования имеют следующий физический смысл:

постоянная C_2 – прогиб (y_0) сечения балки в начале координат, увеличенный в EJ раз:

$$c_2 = y_0 EJ;$$

постоянная C_1 – угол поворота (θ) сечения балки в начале координат, увеличенный в EJ раз:

$$c_1 = \theta_0 EJ .$$

Выбирая начало координат на шарнирной концевой опоре, констатируем, что

$$c_2 = 0.$$

Если начало координат на глухой (защемленной) опоре, то

$$c_2 = 0 \text{ и } c_1 = 0.$$

Пример

Для балки с нагрузкой, показанной на рис. 1:

1. Раскрыть статическую неопределимость - определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Подобрать номер двутаврового поперечного сечения.

$$\text{Дано: } P=ql, \quad m=\frac{ql^2}{2}, \quad q=5\text{кн/м}, \quad l=6\text{м}, \quad [\sigma]=160\text{МПа}.$$

1. Определение реакций

Назначаем опорные реакции R_A , M_A , R_B , записываем 3 уравнения статики, справедливые для этой системы сил:

$$\sum X = 0.$$

Так как проекции пар m и M_A на любую ось равны нулю, то это уравнение дает равенство нулю суммы проекций, перпендику-

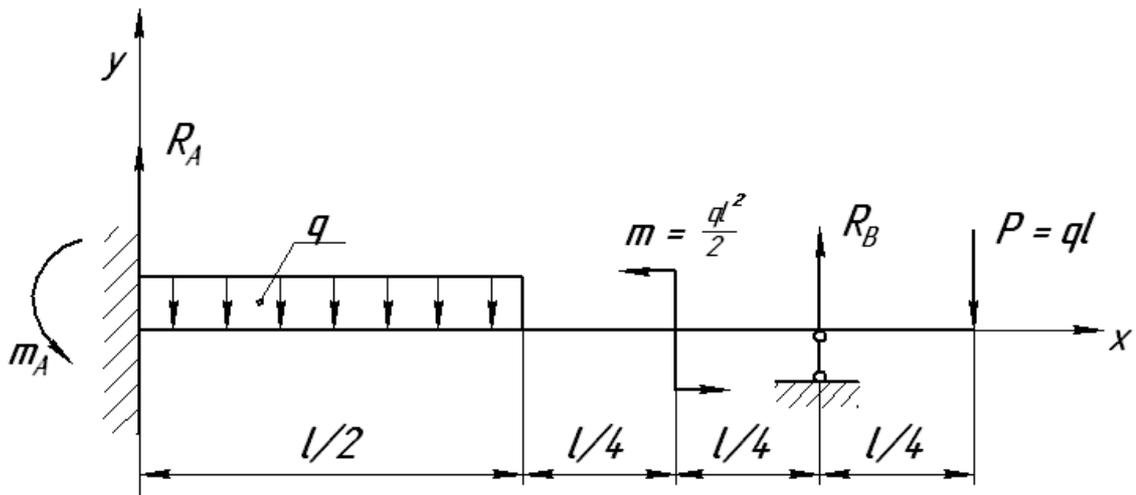


Рис. 1. Расчетная схема балки

лярных оси X сил:

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - \frac{ql}{2} - P = 0. \quad (1)$$

Составим уравнения моментов относительно точки. При использовании аналитического метода удобнее составлять уравнения моментов относительно точки на опоре, противоположной глухой (защемленной) опоре (точке B):

$$\sum M_{(B)} = 0 \quad -M_A + R_A \cdot l - \frac{gl}{2} \cdot \frac{3}{4}l - m + P \cdot \frac{l}{4} = 0. \quad (2)$$

Неизвестных усилий 3 - R_A , M_A , R_B , а возможных уравнений статики - 2, задача 1 раз статически неопределима. Для составления добавочного уравнения используем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

Выбираем начало координат в точке A - на глухой опоре, констатируя, что C_1 и C_2 равны нулю, т.к. на глухой опоре линейные перемещения сечения и угол поворота невозможны.

Дифференциальное уравнение надо составлять для участка, которому принадлежит опора B, чтобы использовать граничные условия на опоре. При этом необходимо искусственно продолжить распределенную нагрузку до конца балки и уравновесить по этому же закону (рис.2).

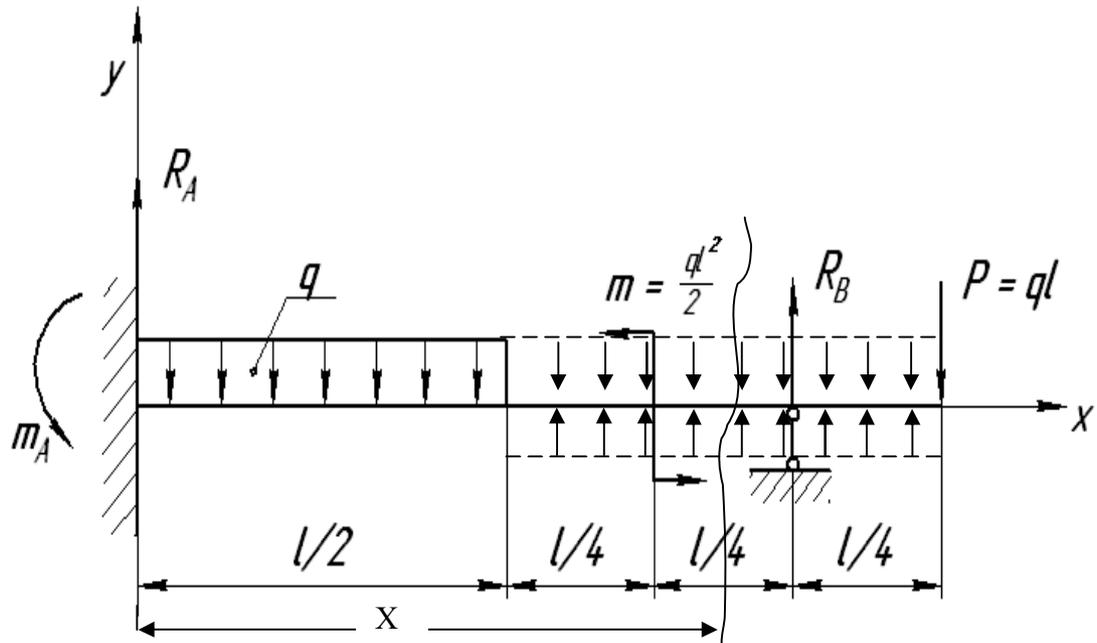


Рис. 2. Расчетная схема с учетом условий Клебша

Составим дифференциальное уравнение - напишем выражение изгибающего момента для сечения с абсциссой x , используя правило знаков для изгибающего момента:

$$y'' EJ = M,$$

$$y'' EJ = -M_A + R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} + \frac{q\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} - m \cdot \left(x - \frac{3}{4}l\right)^0.$$

Интегрируем его дважды, соблюдая условия, отмеченные ранее:

$$y' EJ = -M_A \cdot x + R_A \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6} - m \cdot \left(x - \frac{3}{4}l\right) + c_1,$$

$$yEJ = -M_A \cdot \frac{x^2}{2} + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{24} - m \cdot \frac{\left(x - \frac{3}{4}l\right)^2}{2} + c_2. \quad (3)$$

Начальные условия для точки на опоре В:

$$x = l, \quad y = 0.$$

Подставим их в выражение (3) с учетом того, что $c_2 = 0$:

$$0 = -M_A \cdot \frac{l^2}{2} + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + \frac{ql^4}{16 \cdot 24} - m \cdot \frac{l^2}{32}. \quad (4)$$

Получили добавочное уравнение, связывающее неизвестные R_A и M_A .

Теперь надо совместно решить уравнения (2) и (4), преобразовав их, подставляя значения m и P в долях ql :

$$\begin{aligned} -M_A + R_A \cdot l - \frac{3}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{2} + ql \cdot \frac{l}{4} &= 0, \\ -M_A \cdot \frac{l^2}{2} + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + \frac{ql^4}{16 \cdot 24} - \frac{ql^4}{64} &= 0, \\ -M_A + R_A \cdot l - \frac{5}{8}ql^2 &= 0, \\ + \quad -M_A \cdot \frac{l^2}{2} + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{21}{384}ql^4 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычтем эти уравнения системы почленно, предварительно разделив второе уравнение на l^2 и умножив его на 2, тогда

$$-\frac{2}{3}R_A + \frac{99}{192}ql = 0$$

$$R_A = \frac{99}{128}ql$$

Из любого уравнения системы найдем M_A :

$$M_A = \frac{99}{128}ql^2 - \frac{5}{8}ql^2$$

$$M_A = \frac{19}{128}ql^2.$$

Реакцию R_B найдем из выражения (1):

$$R_B = -\frac{99}{128}ql + \frac{ql}{2} + ql, \text{ отсюда}$$

$$R_B = \frac{93}{128}ql.$$

Знак «плюс» у R_A , M_A , R_B показывает, что направление реакции выбрано правильно.

Сделаем проверку правильности определения реакций. Для этого нужно составить уравнения моментов относительно точки балки, не используемой для составления второго уравнения статики (удобнее использовать т.А):

$$\begin{aligned} \sum M(A) &= -M_A + \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - m - R_B \cdot l + P \cdot \frac{5}{4}l = ql^2 \left(-\frac{19}{128} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{93}{128} + \frac{5}{4} \right) = \\ &= ql^2 \left(\frac{-19 + 16 - 64 - 93 + 160}{128} \right) = 0 \end{aligned}$$

Если сумма моментов равна 0, то реакции найдены правильно.

2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Из предыдущего решения найдено:

$$M_A = \frac{19}{128}ql^2, \quad R_A = \frac{99}{128}ql, \quad R_B = \frac{93}{128}ql.$$

Отмечаем 4 участка на балке, на каждом участке балку мысленно разрезаем, рассматриваем оставшуюся часть (согласно абсциссе x) и для нее записываем выражения для Q и M согласно правилам их знаков. Строим эти выражения графически (рис.3):

$$\text{I участок } 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{4}$$

$$Q = P = ql = 5 \cdot 6 = 30 \text{ кН.}$$

$$M = -P \cdot x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M = 0.$$

$$\text{При } x_1 = \frac{l}{4} \quad M = -\frac{P \cdot l}{4} = -\frac{5 \cdot 6^2}{4} = -45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{II участок } \frac{l}{4} \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$$

$$Q = P - R_B = ql - \frac{93}{128} ql = \frac{35}{128} ql = \frac{35 \cdot 5 \cdot 6}{128} = 8,2 \text{ кН.}$$

$$M = -P \cdot x_2 + R_B \left(x_2 - \frac{l}{4} \right);$$

$$x_2 = \frac{l}{4} \quad M = -P \cdot \frac{l}{4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{4} = -45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$x_2 = \frac{l}{2} \quad M = -P \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{93}{128} ql \cdot \frac{l}{4} = -\frac{163}{256} \frac{ql^2}{2};$$

$$M = -\frac{163 \cdot 5 \cdot 6^2}{256 \cdot 2} = -57,3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

III участок $\frac{l}{2} \leq x_3 \leq \frac{3l}{4}$

$$Q = P - R_B = ql - \frac{33}{128} ql = \frac{35}{128} ql = \frac{35 \cdot 5 \cdot 6}{128} = 8,2 \text{ кН.}$$

$$M = -P \cdot x_3 + R_B \left(x_3 - \frac{l}{4} \right) + m;$$

$$x_3 = \frac{l}{2} \quad M = -ql \cdot \frac{l}{2} + \frac{33}{128} ql \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{2} = \frac{93}{256} \frac{ql^2}{4};$$

$$M = \frac{93 \cdot 5 \cdot 6^2}{256 \cdot 2} = 32,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$x_3 = \frac{3l}{4} \quad M = -P \cdot \frac{3l}{4} + R_B \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2} = -ql \cdot \frac{3l}{4} + \frac{93}{128} ql \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2} = \frac{29ql^2}{256};$$

$$M = -\frac{29 \cdot 5 \cdot 36}{256} = 20,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

IV участок $0 \leq x_4 \leq \frac{l}{2}$

$$Q = R_A - qx_4;$$

$$x_4 = 0 \quad Q = R_A = \frac{99}{128} ql = \frac{99 \cdot 5 \cdot 6}{128} = 23,2 \text{ кН}$$

$$x_4 = \frac{l}{2} \quad Q = R_A - \frac{ql}{2} = \frac{99}{128} ql - \frac{ql}{2} = \frac{35}{128} ql = \frac{35 \cdot 5 \cdot 6}{128} = 8,2 \text{ кН.}$$

$$M = -M_A + R_A \cdot x_4 - \frac{qx_4^2}{2};$$

$$x_4 = 0 \quad M = -M_A = -\frac{19}{128} ql^2 = -\frac{19 \cdot 5 \cdot 6^2}{128} = -26,7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На четвертом участке поперечная сила изменяется по наклонной прямой, а изгибающий момент - по параболе. Но поперечная сила не пересекает ось X на этом участке и, следовательно, на параболе изгибающего момента не будет вершины. Такую параболу проводим по двум точкам.

3. Определение поперечного сечения балки

Подберем номер двутаврового поперечного сечения балки из условия прочности при изгибе:

$$\sigma_{MAX} = \frac{|M_{MAX}|}{W_{H.O.}} \leq [\sigma],$$

где $|M_{MAX}|$ - наибольший изгибающий момент по абсолютному значению на эпюре:

$$M_{MAX} = \frac{163}{256 \cdot 2} ql^2 = 57,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$W_{H.O.}$ - осевой момент сопротивления двутаврового сечения относительно нейтральной оси:

$$W_{H.O.} \geq \frac{M_{MAX}}{[\sigma]}, \quad W_{H.O.} \geq \frac{57,3 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}, \quad W_{H.O.} \geq 3,58 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3 = 358 \text{ см}^3.$$

Располагая на балке двутавр таким образом, чтобы нейтральной осью для него была бы ось X, выбираем из таблицы [1] двутавр номер 27 с $W_X = 371 \text{ см}^3$.

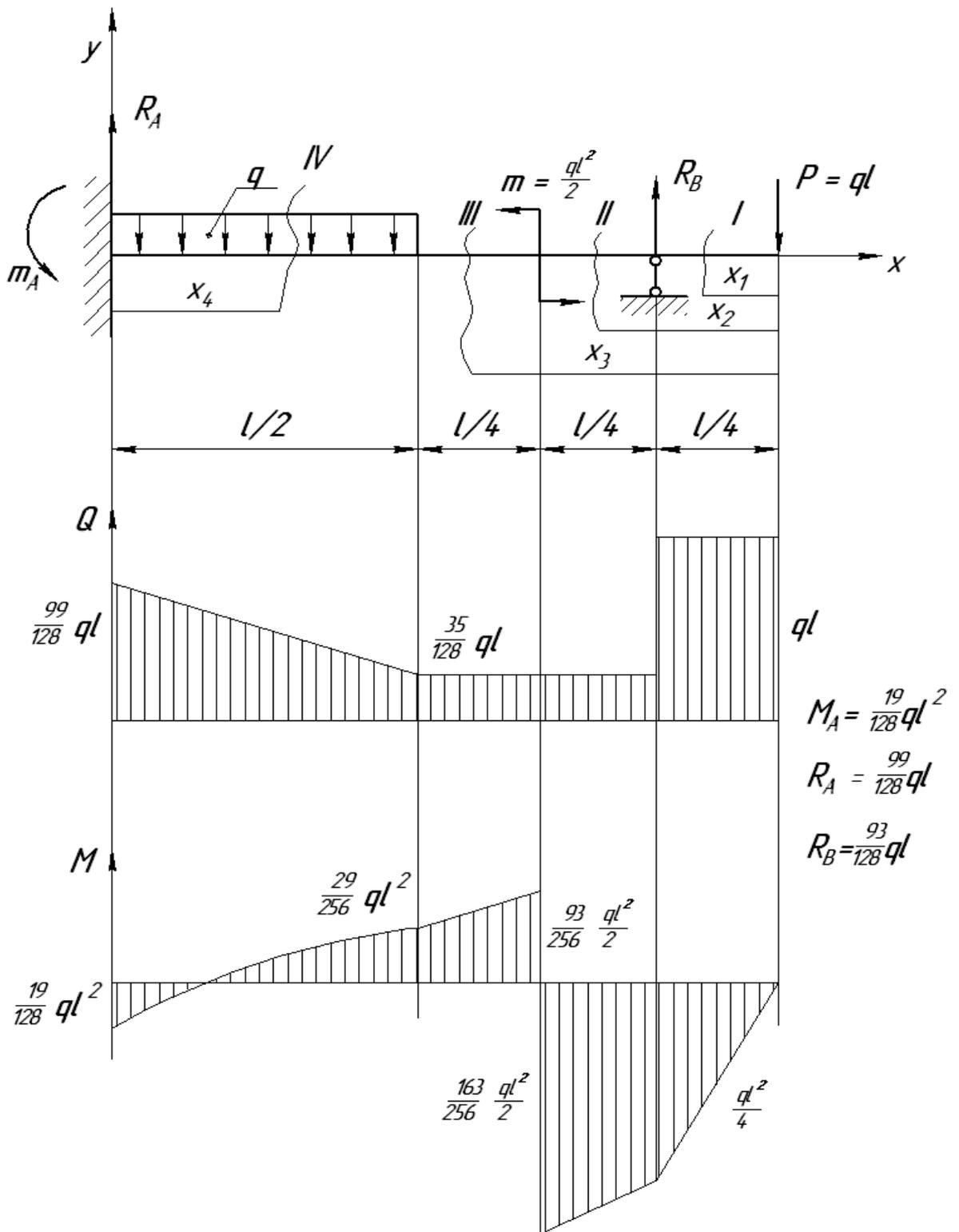


Рис. 3. Построение эпюр Q и M

1.2. Метод сил

Метод сил предполагает составление и решение канонических уравнений, которые имеют вид:

- для один раз статически неопределимой системы

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0 ;$$

- для дважды статически неопределимой системы

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0 ,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0$$

и т.д.,

где δ_{PK} - коэффициенты перемещения от единичных сил,

δ_{PP} - перемещение от сил заданных,

X_n - лишние неизвестные – реакции, которые нельзя определить из уравнений статики.

Рассмотрим применение этого метода на конкретных примерах.

Для балки с нагрузкой, показанной на рис. 4, а, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать двутавровое сечение.

$$\text{Дано: } P=ql, \quad m=\frac{ql^2}{2}, \quad q=5\text{кн/м}, \quad l=6\text{м}, \quad [\sigma]=160\text{МПа}.$$

Раскрытие статической неопределимости системы – это определение опорных реакций.

Назначаем опорные реакции R_A , M_A , R_B и записываем два возможных для этой системы сил уравнения статики:

$$\sum Y=0 \quad R_A + R_B - \frac{ql}{2} - P = 0. \quad (6)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A - R_B \cdot l + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - m + P \cdot \frac{3l}{2} = 0. \quad (7)$$

Для балки имеем три неизвестных силовых фактора – опорные реакции R_A , M_A , R_B и два возможных уравнения статики – балка один раз статически неопределима.

Добавочное уравнение для один раз статически неопределимой системы имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0 . \quad (8)$$

Для составления этого уравнения необходимо сделать следующее:

1. Мысленно отбросим одну из связей (удобнее опору В). Такая система без лишней связи и внешних нагрузок называется основной системой (рис. 4, б).
2. Реакцию, действующую на отброшенной связи, оставляем и обозначаем как X_1 – лишняя неизвестная:

$$R_B = X_1 .$$

3. Загружаем основную систему заданными силами q , m , P и лишней неизвестной X_1 . Система, нагруженная этими силами, называется эквивалентной системой (рис. 4, в).
4. Вычисляем коэффициенты δ_{11} и δ_{1P} . Для определения коэффициента δ_{11} к основной системе прикладываем силу $X_1 = 1$ без учета внешних сил и строим эпюру изгибающих моментов от нее (рис. 4, г). Затем эпюру надо перемножить саму на себя по методу Верещагина, т.е. площадь этой эпюры (F_1) помножить на ординату, соответствующую центру тяжести этой эпюры (K_1):

$$\delta_{11} = \frac{F_1 \cdot K_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \cdot 1 = \frac{l^3}{3EJ}$$

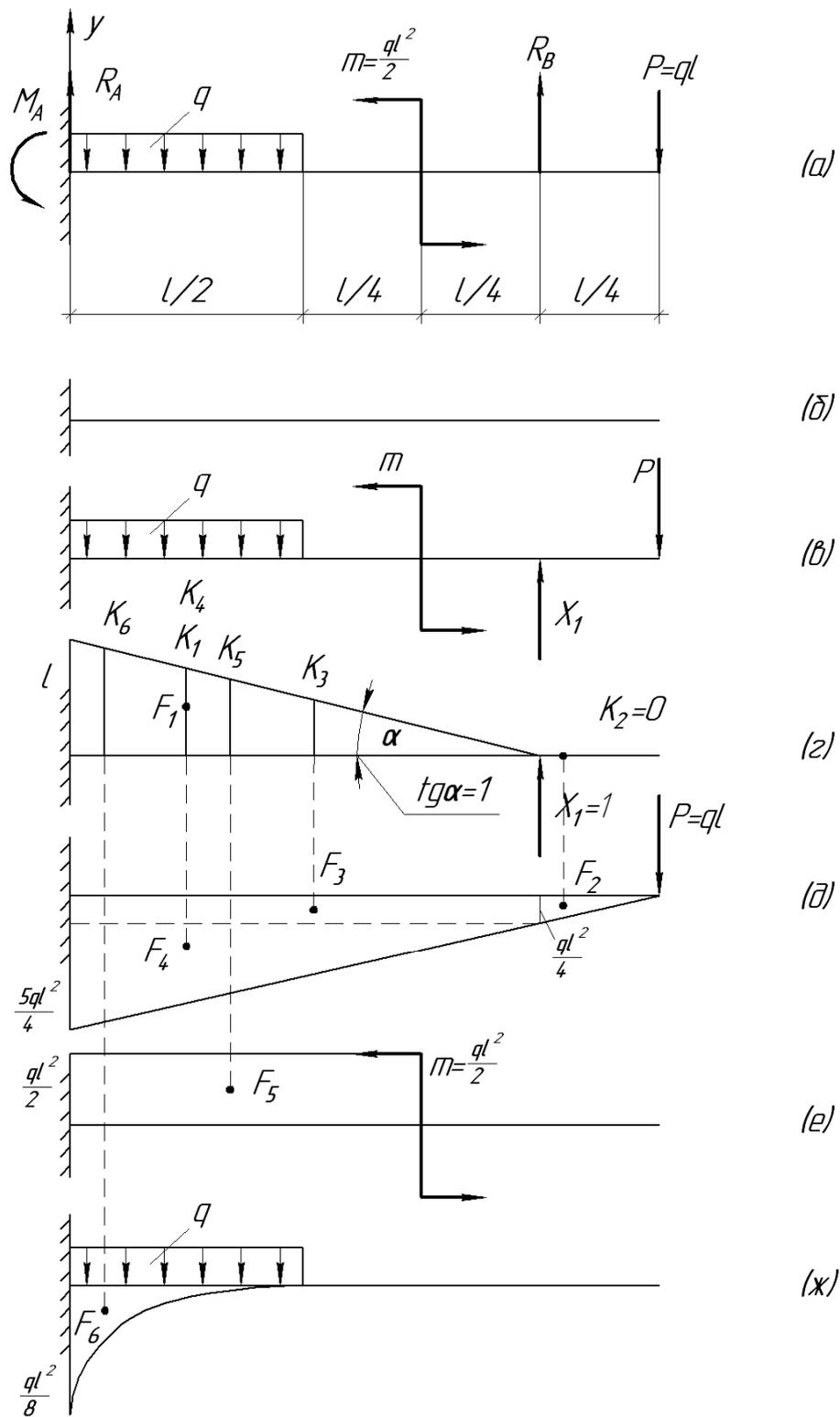


Рис. 4. Метод сил:

- а) расчетная схема; б) основная система; в) эквивалентная система;
 г) эпюра изгибающих моментов от $X_1=1$; д) эпюра от P ; е) эпюра от m ;
 ж) эпюра от q

Здесь $F_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l$ - площадь треугольника;

$K_1 = \frac{2}{3} l \cdot \operatorname{tg} \alpha$ - ордината, соответствующая центру

тяжести треугольника;

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Для вычисления слагаемого δ_{1P} строим эпюру изгибающих моментов от заданных сил (q , m , P) и перемножаем их с эпюрой от сил $X_1 = 1$ по методу Верещагина:

$$\delta_{1P} = \sum_1^{n=i} \frac{F_i \cdot K_i}{EJ} = \frac{1}{EJ} [-F_3 \cdot K_3 - F_4 \cdot K_4 + F_5 \cdot K_5 - F_6 \cdot K_6].$$

Знак у произведения $F_i \cdot K_i$ берется положительным, если обе эпюры для F_i и K_i расположены по одну сторону от оси балки, и отрицательным, если по разные стороны. Удобнее строить эпюры моментов от каждого силового фактора в отдельности. Эпюру от силы P разбиваем на три фигуры: F_2 , F_3 , F_4 , т.к. точка приложения $X_1 = 1$ разбивает всю эпюру на дополнительные участки. Участок F_2 игнорируем, т.к. он будет умножаться на $K_2 = 0$.

Вычисляем F_i и K_i :

$$F_3 = l \cdot \frac{ql^2}{4} = \frac{ql^3}{4}, \quad K_3 = \frac{l}{2},$$

$$F_4 = \frac{1}{2} l \cdot ql^2 = \frac{ql^3}{2}, \quad K_4 = \frac{2}{3} l,$$

$$F_5 = \frac{3}{4} l \cdot \frac{ql^2}{2} = \frac{3ql^3}{8}, \quad K_5 = \left(\frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} l \right) \cdot 1 = \frac{5}{8} l,$$

$$F_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{48}, \quad K_6 = \left(\frac{l}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot 1 = \frac{7}{8}l,$$

$$\delta_{1P} = \frac{ql^4}{EJ} \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1}{48} \cdot \frac{7}{8} \right] = -\frac{93 ql^4}{384 EJ}.$$

Подставляем полученные данные в выражение (8):

$$\frac{l^3}{3EJ} X_1 - \frac{93 ql^4}{384 EJ} = 0, \quad \text{откуда} \quad X_1 = R_B = \frac{93}{128} ql.$$

Реакции R_A , M_A определяем из уравнений (6) и (7):

$$R_A = \frac{99}{128} ql, \quad M_A = \frac{19}{128} ql^2.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, определение номера двутавра показаны в предыдущем примере (см. аналитический метод).

2. БАЛКИ ДВА РАЗА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ

2.1. Аналитический метод

Для балки с нагрузкой, показанной на рис.5, раскрыть статическую неопределимость – определить опорные реакции, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать двутавровое поперечное сечение.

$$\text{Дано: } P = ql, \quad m = \frac{ql^2}{2}, \quad q = 5 \text{ кН/м}, \quad l = 4 \text{ м}, \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Назначаем опорные реакции R_A , M_A , M_B , R_B и записываем для этой системы сил два возможных уравнения статики:

$$\sum Y = 0 \quad R_A - \frac{ql}{2} - P + R_B = 0. \quad (9)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A - R_B \cdot l + \frac{ql^2}{2} + P \cdot \frac{3}{4}l - m + M_B = 0. \quad (10)$$

Начало координат выбираем на опоре В - ось Y вверх, ось X -

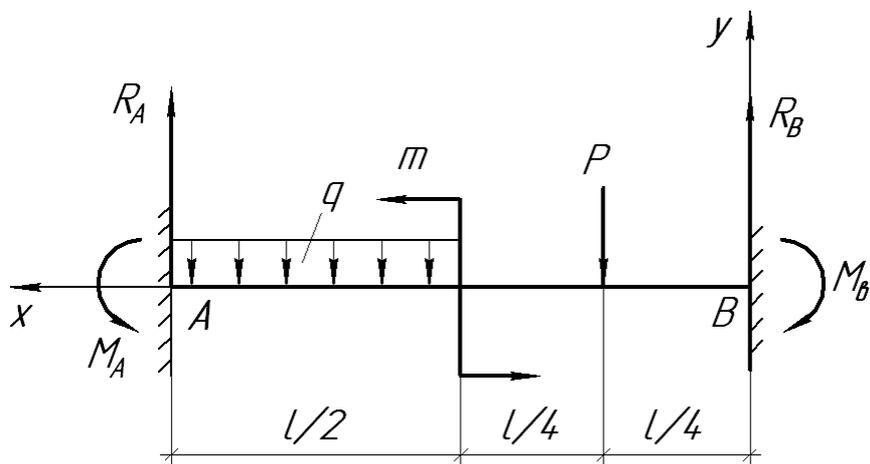


Рис 5. Расчетная схема балки

- налево. Для данной балки удобнее записывать уравнение суммы моментов относительно точки на опоре, противоположной началу координат, - точки В.

На балке четыре неизвестные реакции и два возможных уравнения статики – система два раза статически неопределимая. Для определения реакций необходимо составить еще два уравнения, используя аналитический метод, т.е. дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$y'' EJ = M.$$

Выбрав начало координат на глухой опоре В, констатируем, что постоянные интегрирования дифференциальных уравнений C_1 и C_2 всегда будут равны нулю в силу их физического смысла.

На балке три участка: I, II и III. В этом случае достаточно составить дифференциальное уравнение только для третьего участка, чтобы, проинтегрировав его дважды и используя условия опирания на опоре А, получить два добавочных уравнения (рис. 6).

Дифференциальное уравнение для III - го участка имеет вид:

$$y'' EJ = -M_B + R_B \cdot x - P \left(x - \frac{l}{4} \right) + m \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right)^0 - \frac{q \left(x - \frac{l}{2} \right)^2}{2}. \quad (11)$$

При такой системе координат не надо искусственно продол-

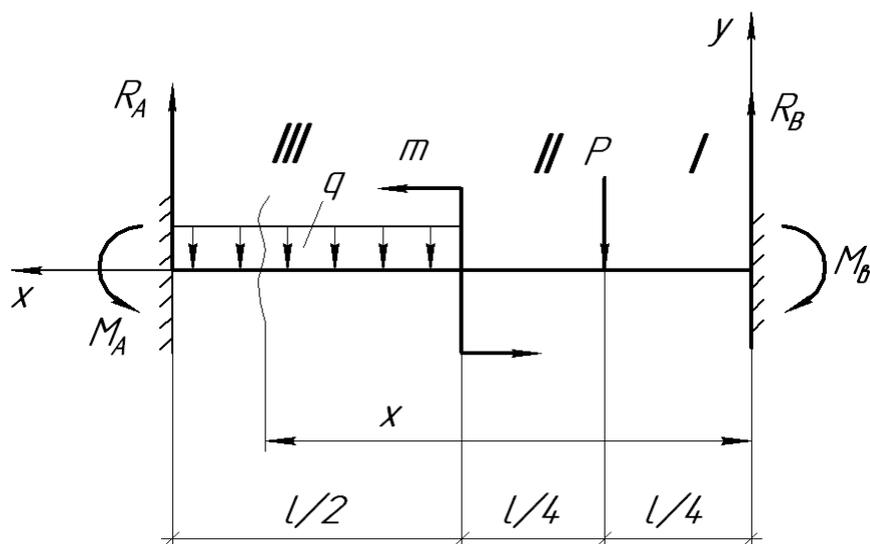


Рис.6. Составление дифференциального уравнения для III-го участка

жать и уравнивать распределенную нагрузку, т.к. она действует до конца балки, противоположного началу координат. Интегрируем выражение (11), не раскрывая скобок в слагаемых, и пары сил M_B и m не по x , а по $(x - a)^0$, где a – расстояние от точки приложения пары сил до начала координат; для M_B $a = 0$, для m $a = \frac{l}{2}$:

$$y' EJ = -M_B \cdot x + R_B \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P \left(x - \frac{l}{4}\right)^2}{2} + m \left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{q \left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6}, \quad (12)$$

$$y EJ = -M_B \cdot \frac{x^2}{2} + R_B \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{P \left(x - \frac{l}{4}\right)^3}{6} + \frac{m \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{q \left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{24}. \quad (13)$$

Выражение (12) – уравнение для углов поворота на третьем участке, выражение (13) – уравнение изогнутой оси балки (уравнение для прогибов).

Используем условия балки на глухой (защемленной) опоре А, которая не позволяет балке в сечении А перемещаться по оси Y и поворачиваться.

$$\text{При } x = l \quad y = 0. \quad (14)$$

$$\text{При } x = l \quad y' = \theta = 0. \quad (15)$$

Подставляя (15) и (14) в (13) и (12), имея в виду, что

$$P = ql \text{ и } m = \frac{ql^2}{2}, \text{ получаем:}$$

$$0 = -M_B \cdot l + R_B \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{ql \cdot \left(\frac{3l}{4}\right)^2}{2} + \frac{ql^2 \cdot l}{4} - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6},$$

$$0 = -M_B \cdot \frac{l^2}{2} + R_B \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql \left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6} + \frac{ql^2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4}{24}.$$

Сокращая первое выражение на l , а второе на l^2 , получим и два уравнения с двумя неизвестными M_B и R_B :

$$\left. \begin{aligned} R_B \cdot \frac{l}{2} - M_B - \frac{5}{96} ql^2 &= 0, \\ R_B \cdot \frac{l}{6} - \frac{1}{2} M_B - \frac{ql^2}{96} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{X (-2)}$$

Умножим второе уравнение на (-2) и сложим почленно оба уравнения:

$$R_B \cdot \frac{l}{6} - \frac{5}{96} ql^2 + \frac{2ql^2}{96} = 0,$$

$$R_B = \frac{3}{16} ql.$$

Из первого уравнения системы найдем M_B :

$$M_B = \frac{3}{16} ql \cdot \frac{l}{2} - \frac{9ql^2}{96} = \frac{ql^2}{24}.$$

Положительные знаки у M_B и R_B свидетельствуют о правильно назначенном направлении реакций.

Реакции R_A и M_A найдем из уравнений статики:

из (9)

$$R_A = \frac{ql}{2} + ql - \frac{3}{16}ql = \frac{21}{16}ql;$$

из (10)

$$M_A = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{2} + \frac{3}{4}ql^2 - \frac{3}{16}ql^2 + \frac{ql^2}{24} = \frac{11}{48}ql^2.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Получено:

$$M_A = \frac{11}{48}ql^2, \quad R_A = \frac{21}{16}ql, \quad R_B = \frac{3}{16}ql, \quad M_B = \frac{1}{24}ql^2.$$

На балке три участка: I, II и III. На каждом участке балку мысленно разрезаем, отбрасываем левую или правую часть и для оставшейся части записываем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, закоординировав разрезанное сечение абсциссой x_i . Полученные выражения строим графически (рис.7).

$$\text{I участок} \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$$

Начало координат на левом конце балки: ось Y - вверх, ось X - направо. Тогда

$$Q = R_A - qx_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q = R_A = \frac{21}{16}ql = \frac{21 \cdot 5 \cdot 4}{16} = 26,25 \text{ кН.}$$

$$\text{При } x_1 = \frac{l}{2}$$

$$Q = R_A - \frac{ql}{2} = \frac{21}{16}ql - \frac{ql}{2} = \frac{13}{16}ql = \frac{13 \cdot 5 \cdot 4}{16} = 16,25 \text{ кН.}$$

$$\text{Изгибающий момент} \quad M = -M_A + R_A \cdot x - \frac{qx_1^2}{2}.$$

$$\text{При } x_1 = 0$$

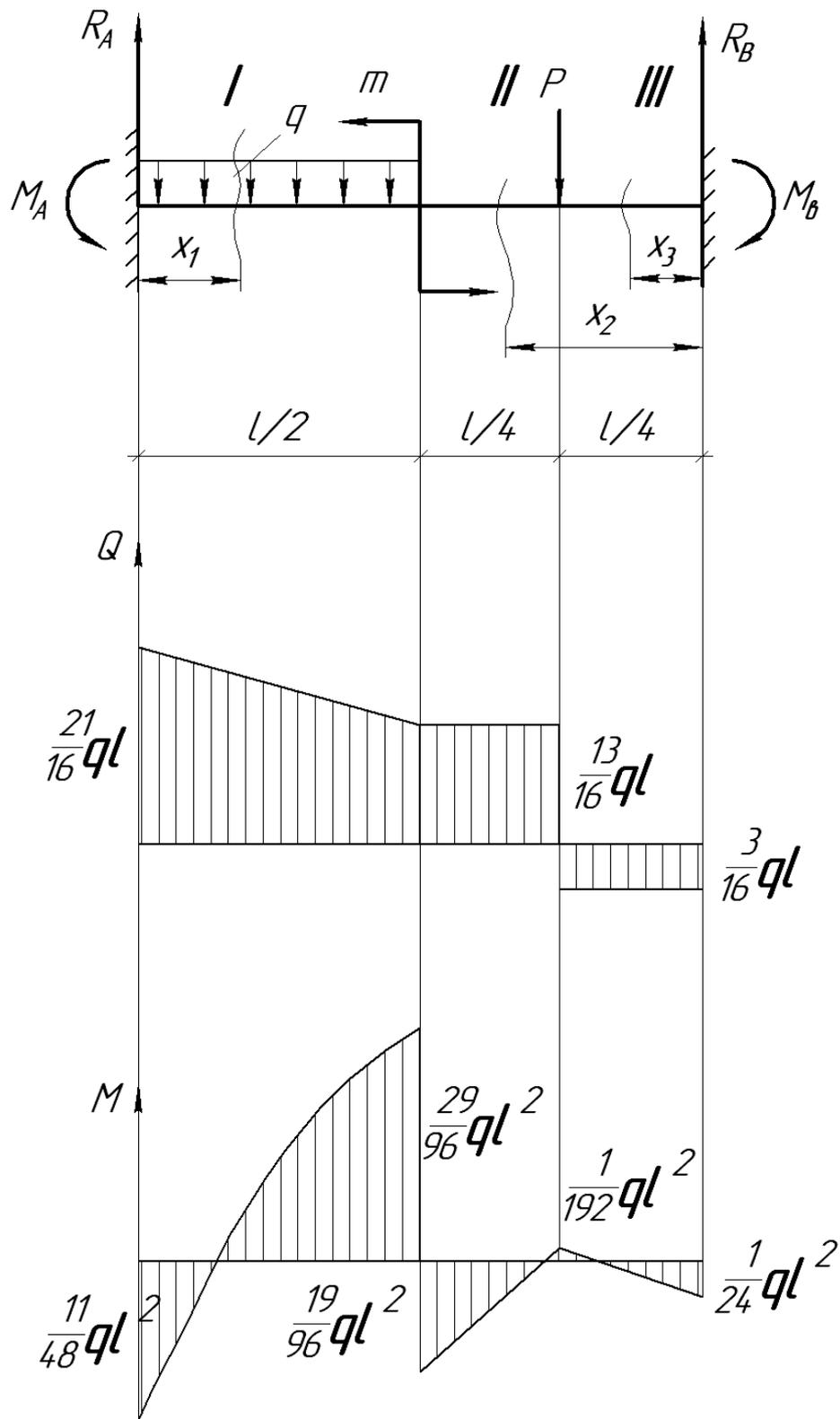


Рис.7. Построение эпюр Q и M

$$M = -M_A = -\frac{11}{48}ql^2 = -\frac{11 \cdot 5 \cdot 4^2}{48} = -18,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x_1 = \frac{l}{2}$$

$$M = -M_A + R_A \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = -\frac{11}{48}ql^2 + \frac{21}{16}ql \cdot \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{29ql^2}{96} = \frac{29 \cdot 5 \cdot 4^2}{96} = 24,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На этом участке поперечная сила не пересекает ось X, следовательно, на эпюре моментов (парабола) не будет вершины. Такую параболу проводим по двум точкам, не исследуя ее на экстремум.

$$\text{III участок } 0 \leq x_3 \leq \frac{l}{4}$$

Начало координат на правом конце балки: ось X - налево, ось Y - вверх. Тогда

$$Q = -R_B = -\frac{3}{16}ql = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{16} = -3,75 \text{ кН}.$$

$$\text{Изгибающий момент } M = -M_B + R_B \cdot x_3.$$

$$\text{При } x_3 = 0 \quad M = -M_B = -\frac{ql^2}{24} = -\frac{5 \cdot 4^2}{24} = -3,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x_3 = \frac{l}{4}$$

$$M = -M_B + R_B \cdot \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{24} + \frac{3}{16}ql \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{192}ql^2 = \frac{5 \cdot 4^2}{192} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{II участок } \frac{l}{4} \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$$

$$\text{Тогда } Q = -R_B + P = -\frac{3}{16}ql + ql = \frac{13}{16}ql = \frac{13 \cdot 5 \cdot 4}{16} = 16,25 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент $M = -M_B + R_B \cdot x_2 - P \left(x - \frac{l}{4} \right)$.

При $x_2 = \frac{l}{4}$

$$M = -M_B + R_B \cdot \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{24} + \frac{3}{16}ql \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{192}ql^2 = \frac{5 \cdot 4^2}{192} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При $x_2 = \frac{l}{2}$

$$M = -M_B + R_B \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^2}{24} + \frac{3}{16}ql \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot \frac{l}{4} = -\frac{19}{96}ql^2 =$$

$$= -\frac{19 \cdot 5 \cdot 4^2}{96} = -15,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подберем номер двутаврового поперечного сечения балки из условия прочности при изгибе:

$$\sigma_{MAX} = \frac{|M_{MAX}|}{W_{H.O.}} \leq [\sigma],$$

где $|M_{MAX}|$ - наибольший изгибающий момент по абсолютному значению на эпюре:

$$M_{MAX} = \frac{29}{96}ql^2 = 24,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$W_{H.O.}$ - осевой момент сопротивления двутаврового сечения относительно нейтральной оси:

$$W_{H.O.} \geq \frac{M_{MAX}}{[\sigma]}, \quad W_{H.O.} \geq \frac{24,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}, \quad W_{H.O.} \geq 151 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \quad W_{H.O.} \geq 151 \text{ см}^3.$$

Располагая на балке двутавр таким образом, чтобы нейтральной осью для него была бы ось X, выбираем из таблицы [1] двутавр номер 18а с $W_X = 159 \text{ см}^3$.

2.2. Метод сил

Для той же балки с прежними данными раскроем статическую неопределимость, построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя метод сил (рис. 8).

Назначаем опорные реакции (см. рис. 8, а) и записываем два возможных уравнения статики:

$$\sum Y = 0 \quad R_A + R_B - \frac{ql}{2} - P = 0. \quad (16)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A - R_B \cdot l + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - m + P \cdot \frac{3l}{4} + M_B = 0 \quad (17)$$

Число неизвестных реакций четыре, число возможных уравнений статики два. Балка два раза статически неопределимая.

Для дважды статически неопределимой балки

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где δ_{nm} - коэффициенты перемещения от единичных сил, определяемые по методу Верещагина,

X_1 и X_2 - неизвестные реакции на опорах,

δ_{np} - перемещения от заданных внешних нагрузок

P , m , q по направлению единичных силовых факторов, вычисляемые также по методу Верещагина ($P = ql$, $m = \frac{ql^2}{2}$).

Мысленно отбросим правую опору, получив основную систему (см. рис. 8, б). Реакции M_B и R_B оставляем как действующие, обозначая их

$$R_B = X_1, \quad M_B = X_2.$$

Загружаем основную систему заданными силами P , m , q и лишними неизвестными X_1 и X_2 . Получаем эквивалентную систему (см. рис. 8, в).

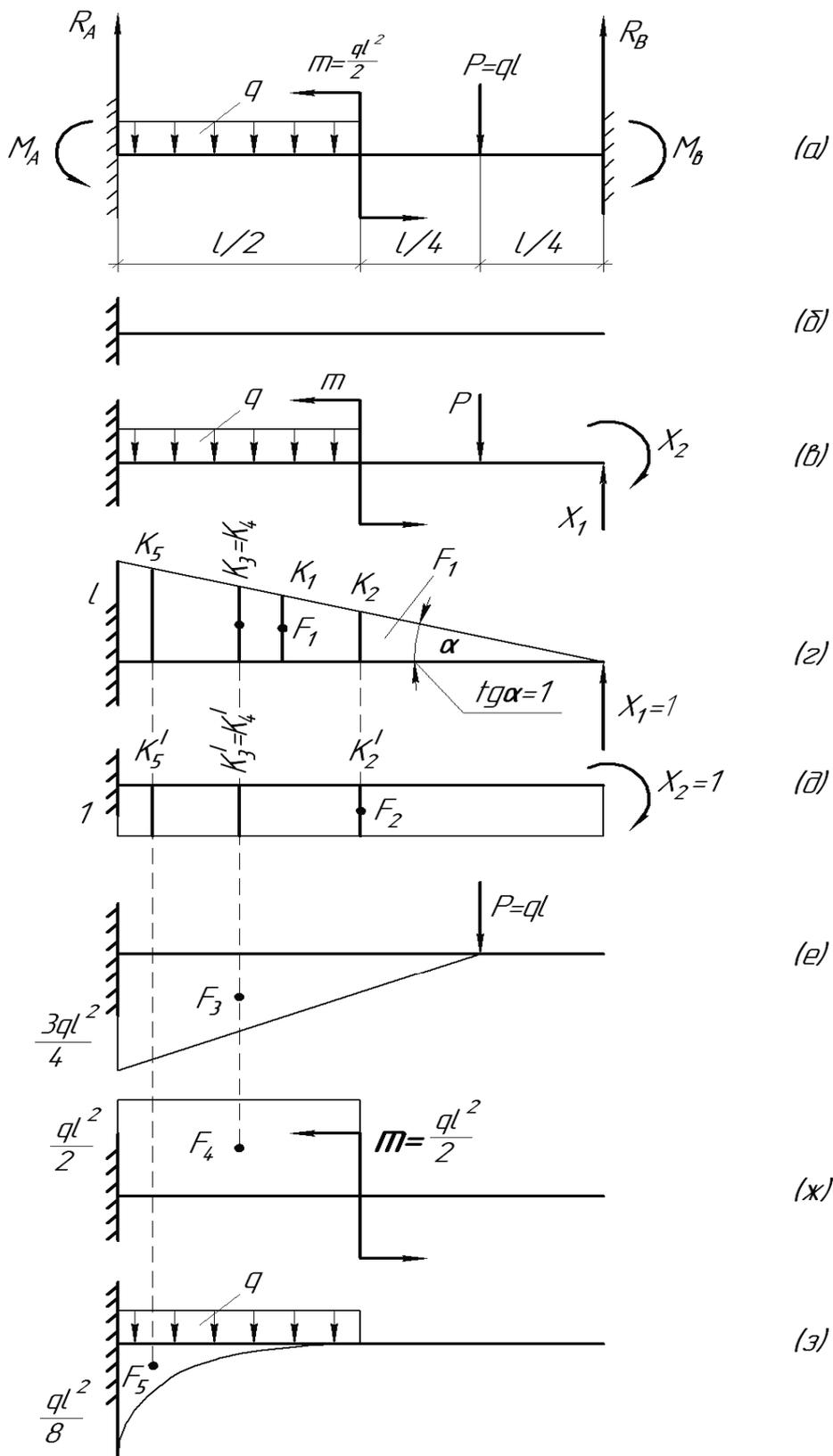


Рис. 8. Метод сил: а) расчетная схема; б) основная система; в) эквивалентная система; г) эпюра М от $X_1=1$; д) эпюра М от $X_2=1$; е) эпюра от P ; ж) эпюра от m ; з) эпюра от q

Для вычисления коэффициентов δ_{nm} строим эпюры изгибающих моментов от единичных силовых факторов X_1 и X_2 (см. рис. 8, г, д).

Для определения коэффициента δ_{11} необходимо помножить площадь треугольника F_1 на ординату K_1 , соответствующую центру тяжести треугольника:

$$\delta_{11} = \frac{F_1 \cdot K_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \cdot 1 = \frac{l^3}{3EJ}$$

Для вычисления коэффициента δ_{12} надо помножить площадь прямоугольника F_2 на ординату K_2 , соответствующую центру тяжести прямоугольника:

$$\delta_{12} = -\frac{F_2 \cdot K_2}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} l \cdot 1 = -\frac{l^2}{2EJ}.$$

Знак «минус» у выражения свидетельствует о том, что эпюры от $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ расположены по разные стороны от оси балки.

Далее

$$\delta_{21} = \delta_{12} = -\frac{l^2}{2EJ}.$$

Коэффициенты, отличающиеся перестановкой индексов, равны.

Для вычисления коэффициента δ_{22} надо помножить площадь прямоугольника F_2 на ординату K'_2 , соответствующую центру тяжести прямоугольника:

$$\delta_{22} = \frac{F_2 \cdot K'_2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot l \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{EJ}.$$

Для вычисления коэффициентов δ_{1P} и δ_{2P} необходимо построить эпюры моментов от заданных сил P , m , q .

Для вычисления коэффициента δ_{1P} перемножаем площади F_3 , F_4 , F_5 с ординатами, соответствующими центрам тяжести площадей K_3 , K_4 , K_5 на эпюре от сил $X_1 = 1$:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} [-F_3 \cdot K_3 + F_4 \cdot K_4 - F_5 \cdot K_5],$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} l \cdot \frac{3ql^2}{4} = \frac{9ql^3}{32}, \quad K_3 = \left(\frac{l}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} l \right) \cdot 1 = \frac{3}{4} l,$$

$$F_4 = l \cdot \frac{ql^2}{4} = \frac{ql^3}{4}, \quad K_4 = \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot 1 = \frac{3}{4} l,$$

$$F_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{48}, \quad K_5 = \left(\frac{l}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot 1 = \frac{7}{8} l,$$

$$\delta_{1P} = \frac{ql^4}{EJ} \left[-\frac{9}{32} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{48} \cdot \frac{7}{8} \right] = -\frac{ql^4}{24EJ}.$$

Для вычисления коэффициента δ_{2P} надо перемножить площади F_3 , F_4 , F_5 с ординатами, соответствующими центрам тяжести площадей K'_3 , K'_4 , K'_5 на эпюре от сил $X_2 = 1$ (все ординаты равны единице):

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EJ} [F_3 \cdot K'_3 - F_4 \cdot K'_4 + F_5 \cdot K'_5] =$$

$$= \frac{ql^3}{EJ} \left[\frac{9}{32} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{48} \cdot 1 \right] = \frac{5ql^3}{96 \cdot EJ}.$$

Подставляя вычисленные значения в канонические уравнения (18), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{l^3}{3EJ} X_1 - \frac{l^2}{2EJ} X_2 - \frac{ql^4}{24EJ} &= 0, \\ -\frac{l^2}{2EJ} X_1 + \frac{l}{EJ} X_2 + \frac{5ql^3}{96EJ} &= 0. \end{aligned}$$

Сокращая систему на EJ, первое уравнение - на l^2 , второе - на l , получаем

$$\begin{aligned} \frac{l}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 - \frac{ql^2}{24} &= 0 & X_2 \\ -\frac{l}{2} X_1 + X_2 + \frac{5ql^2}{96} &= 0 \end{aligned}$$

Суммируя систему, получаем

$$X_1 \left(\frac{2}{3}l - \frac{l}{2} \right) - \frac{ql^2}{12} + \frac{5ql^2}{96} = 0.$$

Откуда

$$X_1 = R_B = \frac{3}{16}ql.$$

Из второго уравнения

$$-\frac{l}{2} \cdot \frac{3}{16}ql + X_2 + \frac{5ql^2}{96} = 0.$$

Тогда

$$X_2 = M_B = \frac{1}{24}ql^2.$$

Знаки «плюс» у M_B и R_B свидетельствуют о том, что выбранное для них направление верное. R_A и M_A находим из уравнений статики (16) и (17):

из (16)

$$R_A = \frac{ql}{2} + ql - \frac{3}{16}ql, \quad R_A = \frac{21}{16}ql,$$

из (17)

$$M_A = \frac{1}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{2} + \frac{3}{4}ql^2 - \frac{3}{16}ql^2 + \frac{ql^2}{24}, \quad M_A = \frac{11}{48}ql^2.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и подбор поперечного сечения осуществляем, как в предыдущем примере (см. аналитический метод).

2.3. Уравнение трех моментов

В этом методе за лишние неизвестные принимаются изгибающие моменты, возникающие в сечениях на промежуточных опорах балок.

За основную систему принимается балка с мысленно врезанными шарнирами в сечениях на промежуточных опорах. Таким образом, ее можно представить как ряд однопролетных балок, соединенных между собой шарнирами.

Степень статической неопределимости вычисляется как $n-2$, где n – число опор на балке. Уравнений статики для этого метода два. Одна из опор делается шарнирно неподвижной или заземленной, остальные - шарнирно подвижными. Нумерацию опор и пролетов надо вести слева направо, обозначая крайнюю левую опору номером 0.

Уравнение трех моментов имеет вид (рис. 9):

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \left[\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot a_{n+1}}{l_{n+1}} \right],$$

где M_{n-1} , M_n , M_{n+1} - изгибающие моменты, действующие в сечениях на трех опорах,

l_n , l_{n+1} - длина пролета справа и слева от n опоры,

ω_n , ω_{n+1} – площадь эпюры изгибающих моментов от сил, действующих на левом и на правом пролетах,

a_n - расстояние от центра тяжести площади эпюры ω_n до левой опоры,

a_{n+1} - расстояние от центра тяжести площади эпюры ω_{n+1} до правой опоры.

Этот метод применяется для балок с числом опор три и больше. Применим он и для балки постоянной жесткости EJ , поставленной на четыре опоры.

Для балки, показанной на рис. 9, а, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое сечение и определить прогиб в сечении посередине среднего пролета.

Дано: $q = 5 \text{ кН/м}$, $l = 4 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Пронумеруем опоры 0,1,2,3. На балке 4 опоры, и можно написать только два уравнения статики. Система $4 - 2 = 2$ два раза статически неопределима. Использование уравнения трех моментов предполагает наличие балки на трех опорах, его придется использовать дважды.

На промежуточных опорах 1 и 2 в сечениях мысленно врезаны шарниры (на рис. 9 не показаны). Балку можно представить как 3 однопролетные балки, соединенные шарнирами.

В этом случае внешняя нагрузка, действующая в пролете, будет давать эпюру изгибающих моментов только для этого пролета.

Начиная слева, будем рассматривать последовательно балки на трех опорах и строить эпюры изгибающих моментов, как для балок на двух опорах, от нагрузки, действующей между ними.

Рассмотрим балку на опорах 0, 1, 2. (см. рис. 9, б) и расшифруем левую часть уравнения трех моментов, обозначая опоры:

$$\begin{array}{ccc} n-1 & \text{-----} & n & \text{-----} & n+1 \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

Тогда l_n - длина пролета 0 – 1 равна l ,

l_{n+1} - длина пролета 1 – 2 равна l ,

$$M_{n-1} = M_0 = 0,$$

$$M_n = M_1,$$

$$M_{n+1} = M_2.$$

Левая часть уравнения выглядит так:

$$4M_1 \cdot l + M_2 \cdot l.$$

Для вычисления ω_n , ω_{n+1} строят эпюры изгибающих моментов от q и P :

$$4M_1 \cdot l + M_2 \cdot l = -6 \left[\frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} + \frac{1}{2} l \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \right].$$

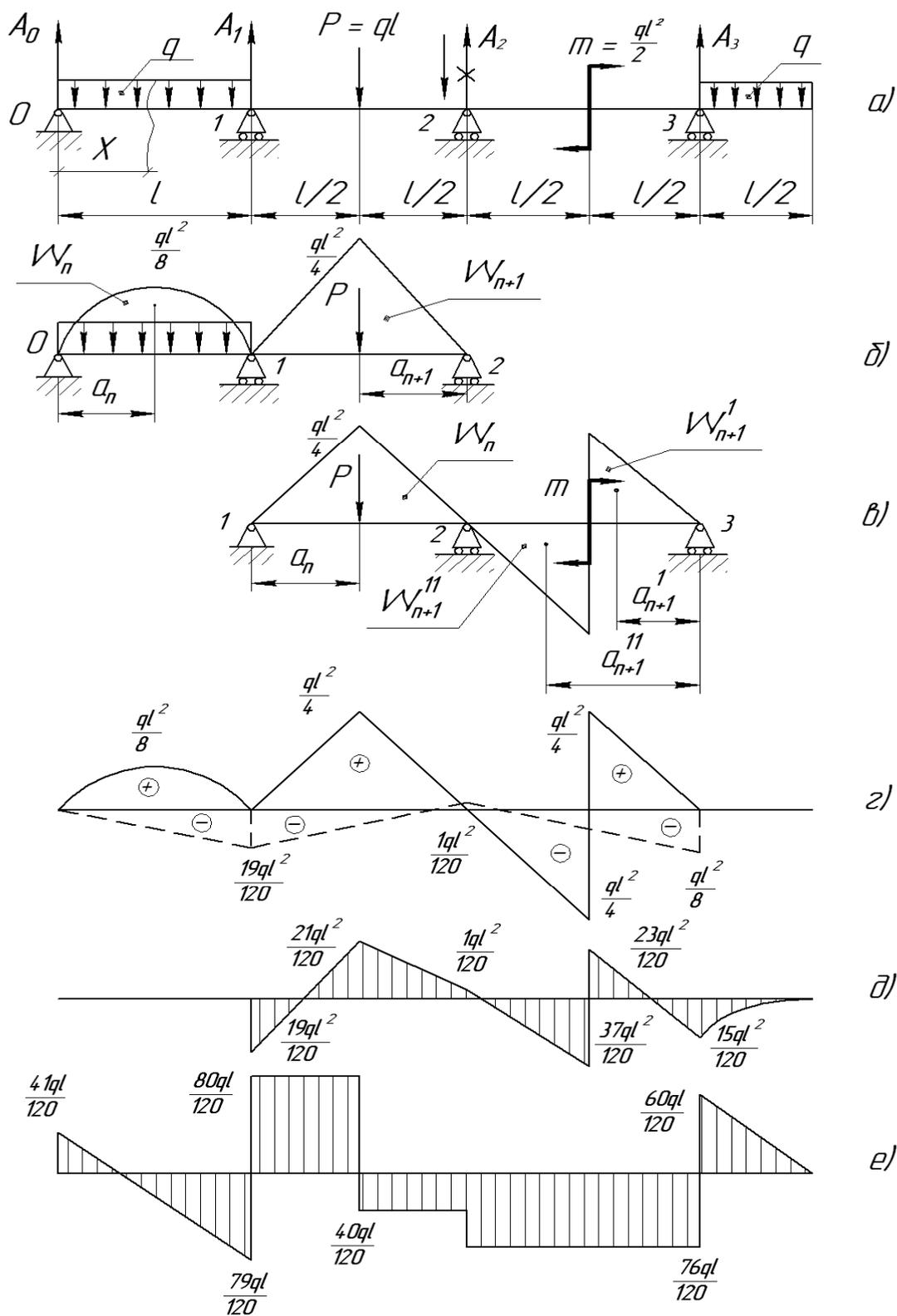


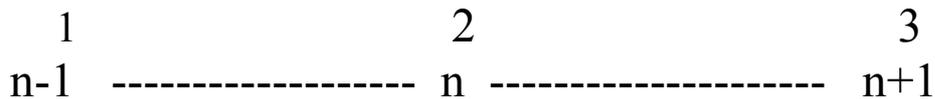
Рис. 9. Метод трех моментов:

- а) расчетная схема балки; б) эпюры моментов на пролетах с опорами 0-1-2;
 в) эпюры моментов на пролетах с опорами 1-2-3; г) сложение эпюр от внешних сил и опорных моментов; д) суммарная эпюра моментов; е) эпюра поперечных сил

Знак «плюс» у ω принимается, если площадь эпюры расположена выше оси балки:

$$4M_1 + M_2 = -\frac{5}{8}ql^2. \quad (19)$$

Теперь рассмотрим балку на опорах 1, 2, 3 (см. рис. 9, в), обозначая опоры:



Тогда $l_n = l$,

$$l_{n+1} = l,$$

$$M_{n-1} = M_1,$$

$$M_n = M_2,$$

$$M_{n+1} = M_3 = -\frac{ql^2}{8}.$$

Действие распределенной нагрузки на консоли позволяет вычислить непосредственно изгибающий момент в сечении на опоре 3.

ω'_{n+1} и ω''_{n+1} образуют две фигуры в пролете 2-3. Следовательно

$$\omega_{n+1} \cdot a_{n+1} = \omega'_{n+1} \cdot a'_{n+1} - \omega''_{n+1} \cdot a''_{n+1} \text{ с учетом расположения } \omega.$$

Раскрываем уравнение трех моментов для этого случая:

$$\begin{aligned}
 & M_1 \cdot l + 4M_2 \cdot l - \frac{ql^2}{8} \cdot l = \\
 & = -6 \left[\frac{1}{2} l \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{1}{l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{l} \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$M_1 + 4M_2 = -\frac{ql^2}{8}. \quad (20)$$

Получили два уравнения (19) и (20) с двумя неизвестными.
Решим их:

$$4M_1 + M_2 = -\frac{5}{8}ql^2 \quad \times 4$$

$$M_1 + 4M_2 = -\frac{ql^2}{8}$$

Умножим первое уравнение на 4 и вычтем почленно:

$$15M_1 = -\frac{20}{8}ql^2 + \frac{ql^2}{8},$$

$$M_1 = -\frac{19}{120}ql^2.$$

Из первого уравнения вычислим M_2 :

$$4 \times \left(-\frac{19}{120}ql^2 \right) + M_2 = -\frac{5}{8}ql^2,$$

$$M_2 = -\frac{1}{120}ql^2.$$

Эпюра изгибающих моментов строится методом наложения эпюр от заданных сил q , P , m (сплошные линии) и эпюр от опорных моментов M_0 , M_1 , M_2 , M_3 (пунктирные линии), которые всегда изменяются по закону прямой линии (см. рис. 9, г).

Сложим с учетом знаков геометрические фигуры, образовавшиеся на всех участках балки, и получим окончательную эпюру моментов (см. рис. 9, д).

При сложении прямоугольных фигур эпюра получается прямоугольная, при сложении криволинейной и прямолинейной эпюра будет криволинейной (на пролете 0-1).

Опорные реакции A_0 , A_1 , A_2 , A_3 определяются с помощью построенной эпюры изгибающих моментов. Для этого балка мысленно разрезается в сечении, где момент известен, и рассматривается та часть балки, где находится определяемая реакция. Для этого сечения составляется выражение изгибающего момента (с учетом знаков) и определяется реакция.

Для определения реакции A_0 мысленно разрежем балку в сечении бесконечно близко слева от опоры 1 и для левой части запишем выражение изгибающего момента, который из эпюры равен $-\frac{19}{120}ql^2$:

$$A_0 \cdot l - \frac{ql^2}{2} = -\frac{19}{120}ql^2, \quad A_0 = \frac{41}{120}ql.$$

Для вычисления A_1 мысленно разрежем балку в сечении бесконечно близко слева от силы P и рассмотрим левую часть:

$$A_0 \cdot \frac{3}{2}l - ql \cdot l + A_1 \cdot \frac{l}{2} = \frac{21}{120}ql^2, \quad A_1 = \frac{159}{120}ql.$$

Для вычисления A_3 рассмотрим сечение бесконечно близко справа от момента m и запишем выражение момента для правой части:

$$-\frac{ql}{2} \cdot \frac{3}{4}l + A_3 \cdot \frac{l}{2} = \frac{23}{120}ql^2, \quad A_3 = \frac{136}{120}ql.$$

Для вычисления A_2 мысленно разрежем балку в сечении бесконечно близко справа от силы P и рассмотрим правую часть:

$$-\frac{ql}{2} \cdot \frac{7}{4}l + A_3 \cdot \frac{3}{2}l - m + A_2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{21}{120}ql^2, \quad A_2 = -\frac{36}{120}ql.$$

Знак «минус» у A_2 показывает, что эта реакция направлена вниз.

Проверим правильность определения реакций. Сумма проекций всех сил на ось Y должна дать нуль:

$$\sum Y = 0 \quad A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - ql - P - \frac{ql}{2} = 0,$$

$$\frac{41}{120}ql + \frac{159}{120}ql - \frac{36}{120}ql + \frac{136}{120}ql - \frac{120}{120}ql - \frac{120}{120}ql - \frac{60}{120}ql = 0.$$

Реакции вычислены правильно, строим эпюру поперечных сил известным методом (см. рис. 9, е).

Чтобы правильно построить эпюру изгибающих моментов в пролете 0-1, надо исследовать параболическую кривую на

экстремум. Мысленно разрежем на этом участке балку и для части с абсциссой x запишем уравнение изгибающего момента:

$$M = A_0 \cdot x - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{dM}{dx} = A_0 - qx, \quad x = \frac{A_0}{q} = \frac{41}{120} ql.$$

При этом x на параболе будет вершина. Найдем для нее максимум, подставив в выражение изгибающего момента

$$x = \frac{41}{120} l :$$

$$M = \frac{41}{120} ql \cdot \frac{41}{120} l - \frac{q}{2} \left(\frac{41}{120} l \right)^2 = \frac{1681}{28800} ql^2.$$

Подберем номер двутаврового сечения балки из условия прочности при изгибе

$$\frac{|M_{MAX}|}{W_{H.O.}} \leq [\sigma].$$

Из эпюры $M_{MAX} = \frac{37}{120} ql^2 = \frac{37 \cdot 5 \cdot 4^2}{120} = 24,7 \text{ кН} \cdot \text{м},$

где $W_{H.O.}$ - осевой момент сопротивления двутаврового сечения относительно нейтральной оси;

$$W_{H.O.} \geq \frac{M_{MAX}}{[\sigma]}, \quad W_{H.O.} \geq \frac{24,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}, \quad W_{H.O.} \geq 154 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \quad W_{H.O.} \geq 154 \text{ см}^3.$$

Выбираем из таблицы [1] двутавр номер 18 с $W_x = 185 \text{ см}^3$ и $I_x = 1660 \text{ см}^4$.

Для определения прогиба посередине среднего пролета (рис. 10) мысленно вырежем пролет 1-2 сечениями, бесконечно близкими слева от опоры 1 и справа от опоры 2, и поставим эту часть на две шарнирные опоры.

В разрезанных сечениях будут действовать опорные моменты M_1, M_2 и вертикальные реакции A'_1 и A'_2 .

Определим прогиб аналитическим методом. Выбрав начало координат на опоре 1 (ось X - направо, ось Y - вверх), констатируем, что постоянная интегрирования C_2 равна 0. Для определения другой постоянной интегрирования составим

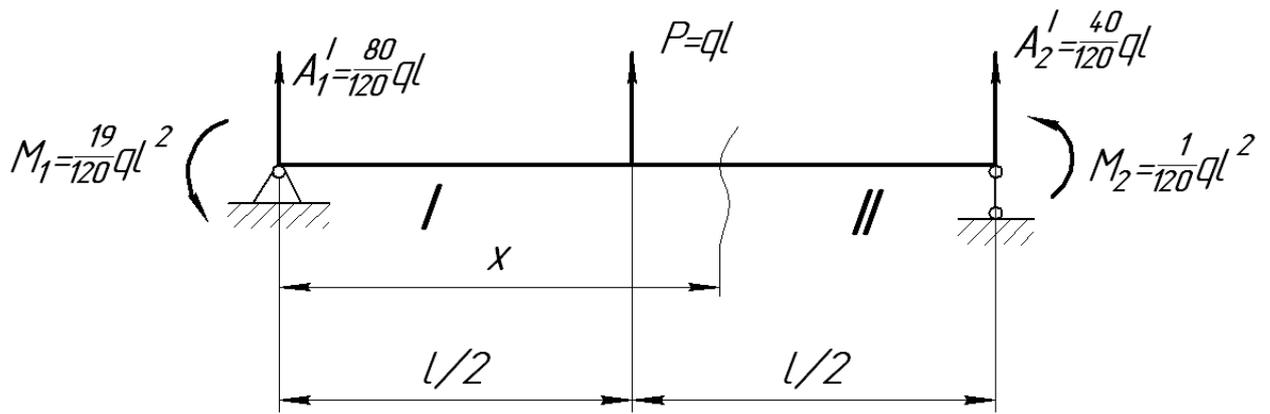


Рис. 10. Определение деформаций

дифференциальное уравнение второго участка:

$$y'' EJ = M = -M_1 + A_1' \cdot x - P \left(x - \frac{l}{2} \right),$$

$$y' EJ = -M_1 \cdot x + A_1' \cdot \frac{x^2}{2} - P \frac{\left(x - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + c_1,$$

$$y EJ = -M \cdot \frac{x^2}{2} + A_1' \cdot \frac{x^3}{6} - P \frac{q \left(x - \frac{l}{2} \right)^3}{6} + c_1 \cdot x + c_2. \quad (21)$$

На опоре 2 при $x = l$ прогиб $y = 0$. Подставим эти условия в (21)

$$0 = -\frac{19}{120} ql^2 \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{80}{120} ql \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql}{6} \cdot \frac{l^3}{8} + c_1 \cdot l, \quad c_1 = -\frac{4}{45} ql.$$

Прогиб посередине пролета найдем из выражения (21), подставив $x = l/2$:

$$y = \frac{ql^4}{EJ} \left[-\frac{19}{120} \cdot \frac{1}{8} + \frac{80}{120} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} - \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{2} \right],$$

$$y = -\frac{98 ql^4}{576 EJ},$$

$$y = -\frac{-98 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 4^4}{576 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1660 \cdot 10^{-8}} = -0,063 \text{ м} = -6,3 \text{ см}.$$

Знак «минус» показывает, что перемещение сечения посередине среднего пролета совершается вниз.

Библиографический список

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов/Н.М.Беляев.-М., 1976.
2. Качурин, В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К.Качурин. – М.,1970.

Учебное издание

Сергей Михайлович Иванов
Евгений Сергеевич Романов
Татьяна Витальевна Шмелева

Решение статически неопределимых балок
по курсу «Сопротивление материалов»

Рекомендовано научно-методическим советом ИГТА в качестве учебного
пособия для студентов специальностей 260704,
260703, 280102, 260901,
260902, 150406, 150601

Редактор И.Н.Худякова

Корректор Н.Е.Балакова

Подписано в печать 26.11.2010.

Формат 1/16 60×84. Бумага писчая. Плоская печать.

Усл.печ.л. 1,63. Уч.-изд.л.1,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел Ивановской государственной
текстильной академии

Копировально-множительное бюро
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса,21