ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановская государственная текстильная академия»
(ИГТА)

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к расчетно-графическим работам № 2 и № 3 по курсу

«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

для студентов спец. 280300 (260704), 280400 (260703), 330500 (280102), 280800 (260901), 280900 (260902), 170700 (150406), 230700 (100101)

Иваново 2007

Настоящие методические указания предназначены для студентов спец. 280300 (260704), 280400 (260703), 330500 (280102), 280800 (260901), 280900 (260902), 170700 (150406), 230700 (100101) дневного и заочного факультетов, выполняющих расчетно-графические работы по дисциплине «Сопротивление материалов».

В методических указаниях предложены задачи для расчетно-графических работ №2 и № 3 на тему «Изгиб балок», а также приводятся примеры решения этих задач.

Составители: канд. техн. наук, доц. С.М. Иванов

канд. техн. наук, доц. Т.В. Шмелева

канд. техн. наук, доц. Е.В.Полякова

доц. С.Л.Халезов

Научный редактор канд. техн. наук, проф. В.А. Суров

Общие положения

Расчетно-графическая работа №2 посвящена изгибу прямолинейных балок. Задача №1 рассматривает изгиб статически определимых глухозаделанных консольных балок, №2 – двухопорных балок, №3 – статически неопределимых балок. Студент выбирает расчетную схему и численные данные задачи в соответствии с индивидуальным вариантом. Номер варианта для студентов дневных факультетов выдает преподаватель, для студентов заочного факультета определяется в соответствии с номером зачетной книжки. Предпоследняя цифра зачетной книжки соответствует номеру расчетной схемы задачи, последняя цифра – номеру численных значений из таблицы данных. Номер варианта один и тот же для всех трех задач.

Если на расчетной схеме отсутствует какой-либо силовой фактор (q, P или M) , то данные для него в таблице игнорируются, включая координаты. Расчетные схемы должны быть начерчены студентом в масштабе в соответствии с координатами a_1 ,a_2 и a_3 . Величину масштаба приводить не требуется.

Преподаватель может вносить изменения в условия задачи в соответствии с особенностями изучения курса «Сопротивление материалов» данной специальности.

Задача №1
Изгиб статически определимой прямолинейной консольной балки с глухой заделкой

Для данной расчетной схемы (рис.1,табл.1) деревянной балки требуется:

1.Написать выражения Q_X и M_X для каждого участка балки в общем виде (в долях ql и ql^2), построить их эпюры и найти максимальные значения $|Q_{X\,max}|$ и $|M_{X\,max}|$.

2. Определить размеры прямоугольного поперечного сечения при отношении $h/b = 2$ и $[\sigma] = 8$ МПа.

3. Найти наибольшие касательные напряжения τ_{max} , а также касательные напряжения в т.С, находящейся на расстоянии h/4 от нейтральной оси. Построить эпюру касательных напряжений по высоте сечения.

4. Определить на свободном конце угол поворота «θ» сечения и прогиб «y» аналитическим и методом Верещагина в общем виде (в долях ql^3/EJ и ql^4/EJ) , а также в радианах и сантиметрах соответственно.

Исходные данные:

$q = 10$ кН/м , $l = 2$ м, $E = 10^4$ МПа.

Пример решения задачи №1

Дано: $M = ql^2$, $P = ql/2$, $a_1 = l/2$, $a_2 = l$ (рис. 2,а).

1. Определение реакций

Обозначим точку глухой заделки буквой А. При таком способе крепления в заделке возникают реактивный момент M_A и реактивная сила R_A.

Чтобы найти эти реакции, необходимо составить уравнения моментов относительно двух точек балки, одна из которых должна быть точкой крепления, т.е. А:

$$\Sigma M(A) = 0,$$

$$-M_A + q\frac{l}{2}\frac{l}{4} + M + Pl = 0,$$

$$M_A = q\frac{l^2}{8} + ql^2 + q\frac{l}{2}l = \frac{13}{8}ql^2.$$

Вторая точка может быть любой, например В:

$$\Sigma M(B) = 0,$$

$$-M_A + R_A l - q\frac{l}{2}\frac{3}{4}l + M = 0,$$

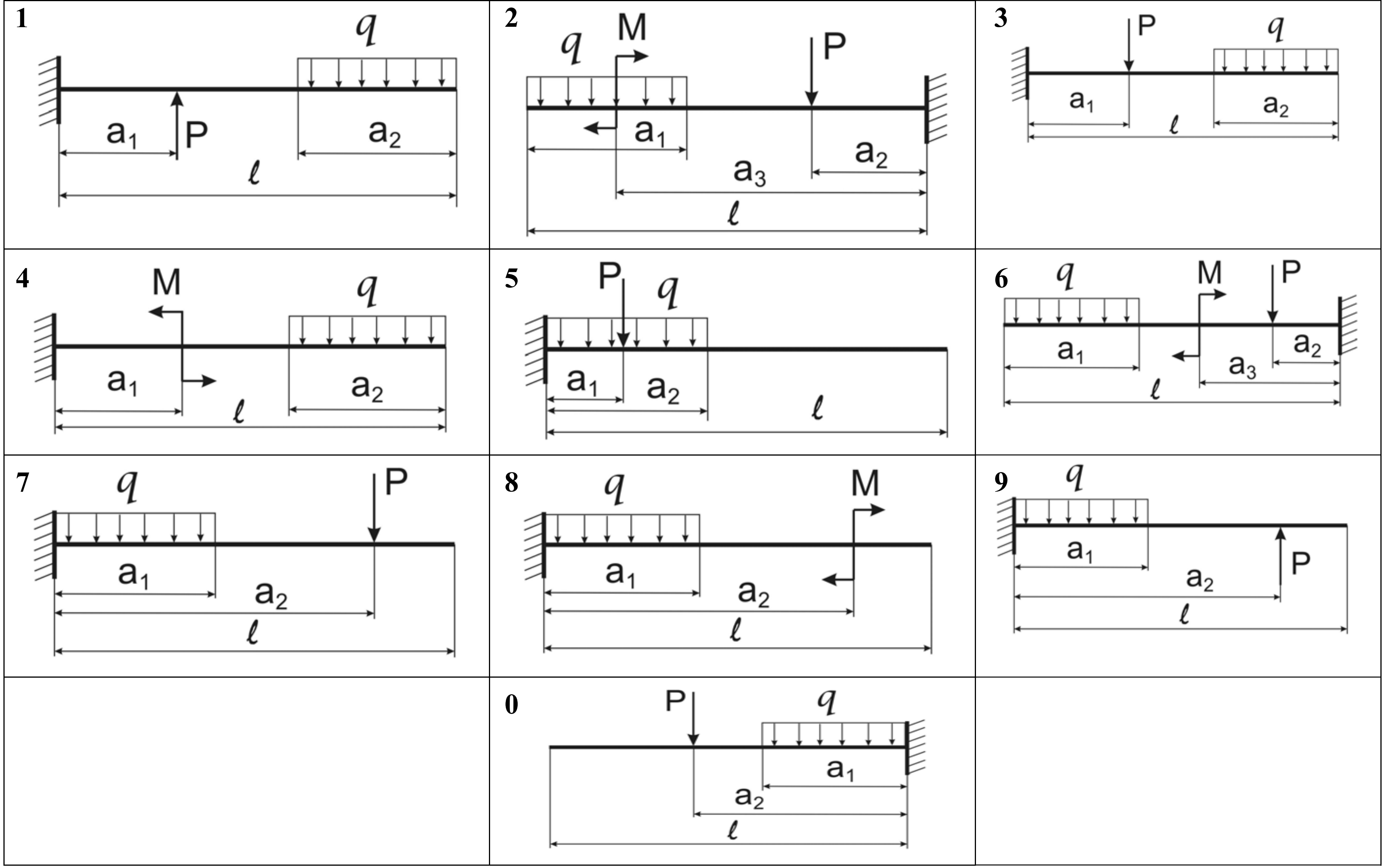

Рис. 1. Консольная глухозаделанная балка

Таблица 1

№ варианта	P, кН	M, кНм	a_1	a_2	a_3
1	$ql/8$	ql^2	l	$l/2$	$l/4$
2	$ql/4$	$2ql^2$	$l/2$	$l/4$	l
3	$ql/2$	$3ql^2$	$l/4$	$3/4l$	$l/2$
4	ql	$ql^2/4$	$3/4l$	l	$l/4$
5	$2ql$	$ql^2/8$	l	$l/2$	$3/4l$
6	ql	$ql^2/2$	$l/4$	l	$l/2$
7	$ql/4$	ql^2	$l/2$	$l/4$	l
8	$ql/2$	$ql^2/4$	$l/4$	$l/2$	$3/4l$
9	$ql/8$	$2ql^2$	$l/2$	$3/4l$	l
0	ql	$ql^2/2$	l	l	$l/4$

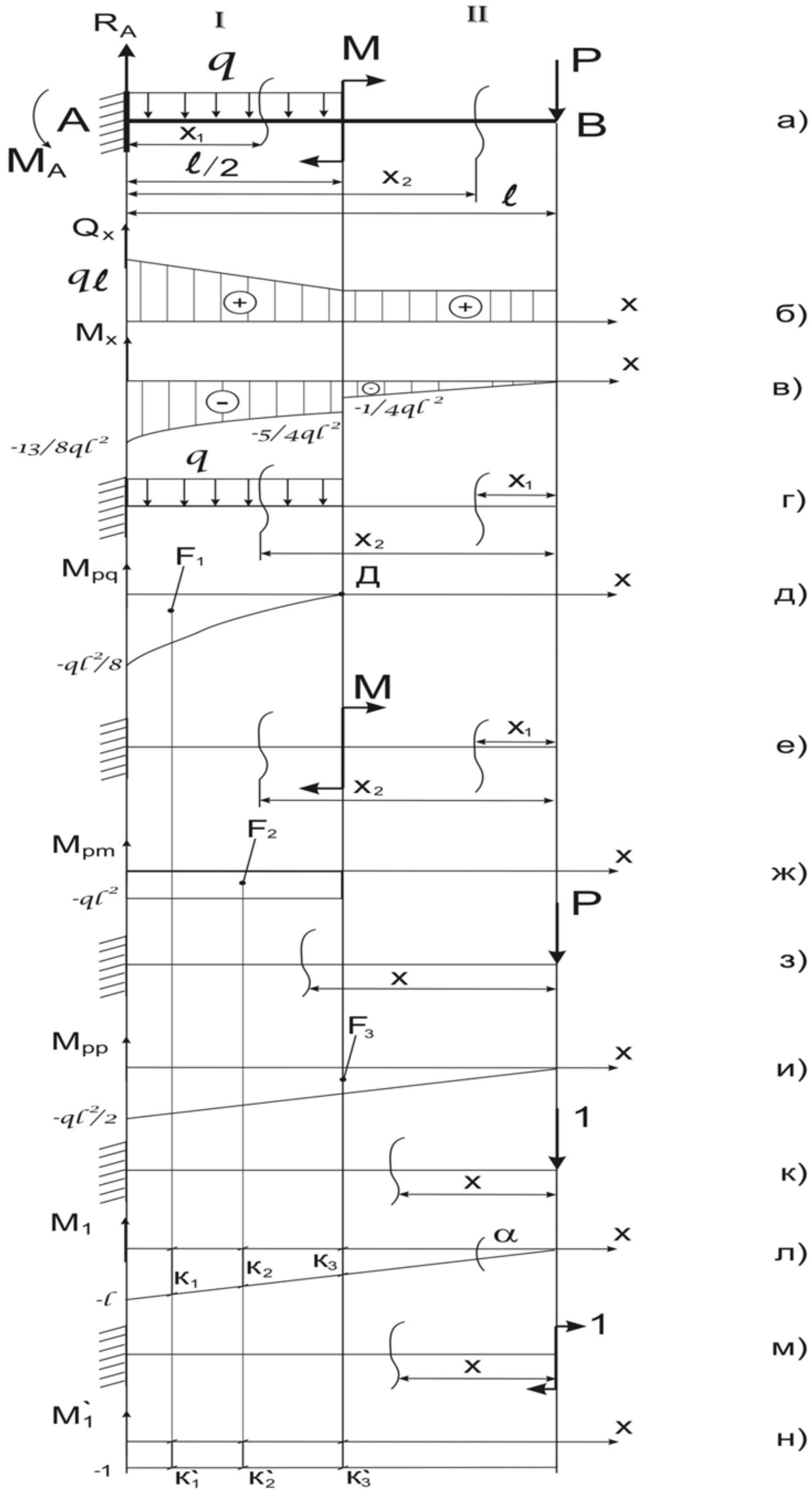

Рис.2. Расчет консольной балки

$$R_A = \frac{\frac{13}{8} ql^2 + \frac{3}{8} ql^2 - ql^2}{l} = ql .$$

Для проверки необходимо спроецировать все внешние силы и реакции на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = R_A - q\frac{l}{2} - P = ql - q\frac{l}{2} - q\frac{l}{2} = 0 .$$

Результат «0» показывает, что реакции найдены верно.

2. Построение эпюры поперечных сил Q_X и изгибающих моментов M_X Балка имеет два участка.

Участок I. Введем текущую координату x_1 на первом участке (рис.2,а):

$$0 \le x_1 \le l/2 .$$

$$Q_{X1} = R_A - qx_1 \text{ при } x_1 = 0 \quad Q_X = R_A = ql,$$

$$\text{при } x_1 = l/2 \quad Q_X = R_A - ql/2 = ql/2.$$

Наносим эти точки на эпюру Q_X и соединяем прямой линией, т.к. зависимость $Q_{X1}(x_1)$ линейна (рис.2,в):

$$M_{X1} = -M_A + R_A x_1 - q\frac{x_1^2}{2}, \quad при\ x_1 = 0 \quad M_{X1} = -M_A = -\frac{13}{8}ql^2,$$

$$при\ x_1 = \frac{l}{2} \quad M_{X1} = -\frac{13}{8}ql^2 + \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{8}ql^2 = -\frac{5}{4}ql^2 .$$

Наносим эти две точки на эпюру M_X (рис. 2,в) . Зависимость $M_{X1}(x_1)$ квадратична, поэтому на первом участке эпюра M_X будет изображаться квадратичной параболой выпуклостью вверх. Определим положение вершины параболы

Т.к. $M'_{X1} = Q_{X1}$, то $Q_{X1} = R_A - qx_1 = 0$, откуда

$$x_1 = R_A/q = ql/q = l ,$$

т.е. вершина параболы находится за пределами участка $0 \le x_1 \le l/2$.

Участок 2. Введем текущую координату x_2 на втором участке (рис. 2,а):

$$l/2 \le x_2 \le l,$$

$$Q_{X2} = R_A - q\,l/2 = q\,l/2.$$

Строим эту прямую на втором участке эпюры Q_X (рис. 2,б):

$$M_{X2} = -M_A + R_A \cdot x_2 - q\frac{l}{2}\left(x_2 - \frac{l}{4}\right) + M,$$

$$при\ x_2 = \frac{l}{2} \quad M_{X2} = -\frac{13}{8}ql^2 + ql\cdot\frac{l}{2} - q\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) + ql^2 = \frac{1}{4}ql^2,$$

$$при\ x_2 = l \quad M_{X2} = -\frac{13}{8}ql^2 + ql\cdot l - q\frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{4}\right) + ql^2 = 0.$$

Наносим эти две точки на втором участке эпюры M_X и соединяем прямой линией, т.к. зависимость $M_{X2}(x_2)$ линейна (рис. 2,в):

$$|Q_{X\,max}| = ql,\ \ |M_{X\,max}| = 13/8\ ql^2.$$

3. Определение размеров поперечного сечения балки

Из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеем

$$\frac{|M_{X\max}|}{W} \le [\sigma],$$

где W – момент сопротивления площади поперечного сечения балки. Тогда

$$W = \frac{|\ M_{X\max}\ |}{[\sigma]}.$$

Чтобы найти численное значение W, необходимо подсчитать величину $M_{X\,max}$:

$$M_{X\,max} = 13/8\ ql^2 = 13/8 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^2 = 6{,}5 \cdot 10^4 \text{ Нм},$$

тогда
$$W = \frac{6{,}5\cdot 10^4}{8\cdot 10^6} = 8{,}13\cdot 10^{-3}\ м^3.$$

С другой стороны, для прямоугольного сечения $W = \frac{bh^2}{6}$. С учетом, что

$h / b = 2$ $W = 2/3\ b^3$. Тогда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W}{2}} = 10^{-1}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\cdot 8{,}13}{2}} = 0{,}23\ м,$$

$$h = 0{,}46 \text{ м}.$$

4. Построение эпюры касательных напряжений по высоте сечения

Определим максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{|Q_{\max}\ |}{bh} = \frac{3\cdot 2\cdot 10^4}{2\cdot 0{,}23\cdot 0{,}46} = 28{,}4\cdot 10^4\ Н/м^2 = 0{,}28\,МПа,$$

где $Q_{X\,max} = ql = 10 \cdot 10^3 \cdot 2 = 2 \cdot 10^4$ Н.

Касательное напряжение в т.С.:

$$\tau_C = 6\cdot\frac{|Q_{\max}|}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-\left(\frac{h}{4}\right)^2\right) = 6\cdot\frac{2\cdot 10^4}{0{,}23\cdot 0{,}46^3}\left(\frac{0{,}46^2}{4}-\left(\frac{0{,}46}{4}\right)^2\right) = 21{,}3\cdot 10^4\ Н/м^2 = 0{,}21МПа$$

.

Построим эпюру касательных напряжений по высоте сечения (рис.3).

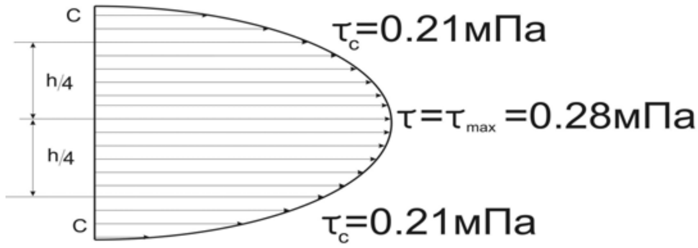

Рис.3. Эпюра касательных напряжений

5.Определение угла поворота и прогиба на свободном конце балки аналитическим способом

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на первом участке имеет вид

$$EJy_1'' = -M_A + R_A x_1 - q\frac{x_1^2}{2}.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$EJy_1' = -M_A x_1 + R_A\frac{x_1^2}{2} - q\frac{x_1^3}{6} + c_1,$$

$$EJy_1 = -M_A\frac{x_1^2}{2} + R_A\frac{x_1^3}{6} - q\frac{x_1^4}{24} + c_1 x_1 + c_2.$$

Точка А крепления балки принадлежит первому участку. Из условий крепления: при $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $y_1^1 = 0$. Подставив во второе и третье уравнения эти данные, получим:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0.$$

Для составления дифференциальных уравнений на втором участке необходимо по условиям Клебша продолжить распределенную нагрузку q до правого конца балки, уравновесив это продолжение такой же нагрузкой, но противоположно направленной (рис. 4).

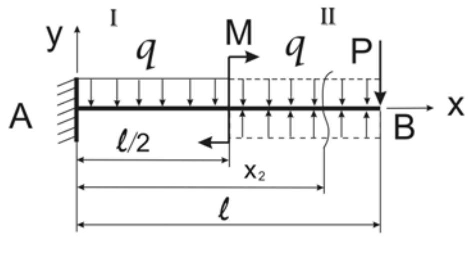

Рис.4. Учет условий Клебша

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$EJy_2'' = -M_A + R_A x_2 - q\frac{x_2^2}{2} + M\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^0 + q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2}.$$

Проинтегрировав с учетом $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, получаем:

$$EJy_2' = -M_A x_2 + R_A\frac{x_2^2}{2} - q\frac{x_2^3}{6} + M\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) + q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6},$$

$$EJy_2 = -M_A\frac{x_2^2}{2} + R_A\frac{x_2^3}{6} - q\frac{x_2^4}{24} + M\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^4}{24}.$$

Точка В (свободный конец балки) принадлежит второму участку и имеет координату $x_2 = l$. Чтобы найти угол поворота θ_B в этой точке, необходимо подставить $x_2 = l$ в уравнение углов поворота второго участка:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ}\left[\, -M_A l + R_A\frac{l^2}{2} - q\frac{l^3}{6} + M\left(l - \frac{l}{2}\right) + q\frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \,\right] =$$
$$= \frac{1}{EJ}\left[-\frac{13}{8}ql^2 l + ql\frac{l^2}{2} - q\frac{l^3}{6} + ql^2\frac{l}{2} + q\frac{l^3}{48}\,\right] = -\frac{37}{48}\frac{ql^3}{EJ}.$$

Знак «-» показывает, что сечение В повернется по часовой стрелке.

Чтобы найти прогиб на свободном конце, подставим $x_2 = l$ в уравнение прогибов для второго участка:

$$y_B = \frac{1}{EJ}\left[\, -M_A\frac{l^2}{2} + R_A\frac{l^3}{6} - q\frac{l^4}{24} + M\frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + q\frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \,\right] =$$
$$= \frac{1}{EJ}\left(-\frac{13}{8}ql^2\frac{l^2}{2} + ql\frac{l^3}{6} - q\frac{l^4}{24} + ql^2\frac{l^2}{8} + q\frac{l^4}{384}\,\right) = -\frac{215}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Знак «-» показывает, что т.В сместится вниз, в сторону отрицательных значений «у».

6. Определение угла поворота и прогиба на свободном конце балки методом Верещагина

Как было показано ранее, эпюра M_{X1} на первом участке изображается квадратичной параболой, причем вершина параболы находится за пределами первого участка. Поэтому, применяя метод Верещагина, нельзя использовать способ расчленения эпюры. Необходимо использовать способ расчленения нагрузки. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от каждой нагрузки по отдельности.

Построим эпюру M_{pq} (рис. 2,д) от распределенной нагрузки q (рис. 2,г). Будем использовать левую систему координат, чтобы не находить реакции в т.А от каждого силового фактора:

$0 \le x_1 \le l/2$, $M_{pq1} = 0$,

$l/2 \le x_2 \le l$, $M_{pq1} = -q\dfrac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2}$; при $x_2 = l/2$ $M_{pq1} = 0$,

при $x_2 = l$ $M_{pq2} = -q \cdot l^2/8$.

Чтобы найти положение вершины параболы, приравняем Q_{pq2} к нулю:

$$Q_{pq2} = q(x_2 - l/2) = 0, \text{ отсюда } x_2 = l/2,$$

т.е. вершина параболы находится в т.Д.

Площадь эпюры равна $F_1 = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{ql^2}{8}\right)\dfrac{l}{2} = -\dfrac{ql^3}{48}$.

Строим эпюру M_{PM} (рис. 2,ж) от момента М (рис. 2,е):

$0 \le x_1 \le l/2$, $M_{PM1} = 0$,

$l/2 \le x_2 \le l$, $M_{PM2} = -M = -ql^2$.

Площадь эпюры равна $F_2 = \left(-ql^2\right)\cdot\dfrac{l}{2} = -\dfrac{ql^3}{2}$.

Строим эпюру M_{PP} (рис. 2,и) от силы Р (рис. 2,з):

$0 \le x \le l$, $M_{PP} = -P \cdot x$, при $x = 0$ $M_{PP} = 0$,

при $x = l$ $M_{PP} = -q \cdot l^2/2$.

Площадь эпюры равна $F_3 = \dfrac{1}{2}\left(-q\dfrac{l^2}{2}\right)\cdot l = -\dfrac{ql^3}{4}$.

Построим единичную эпюру M_1 (рис. 2,л) от силы, равной единице, приложенной на свободном конце балки (рис. 2,к):

$0 \le x \le l$, $M_1 = -1 \cdot x$, при $x = 0$ $M_1 = 0$,

при $x = l$ $M_1 = -l$,

$\text{tg}\,\alpha = -l/l = -1$.

Проецируя центры тяжести площадей F_1, F_2 и F_3 на эпюру M_1, получим

$$K_1 = \left(\frac{3}{4}\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right)tg\alpha = -\frac{7}{8}l, \qquad K_2 = \left(\frac{1}{2}\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right)tg\alpha = -\frac{3}{4}l, \qquad K_3 = \left(\frac{2}{3}l\right)tg\alpha = -\frac{2}{3}l.$$

Построим единичную эпюру $M^1{}_1$ (рис. 2,н) от момента, равного единице, приложенного на свободном конце балки (рис. 2,м):

$0 \le x \le l$, $M^1{}_1 = -1$.

Проецируя центры тяжести площадей F_1, F_2 и F_3 на эпюру M_1, получим

$$K^1{}_1 = K^1{}_2 = K^1{}_3 = -1.$$

Угол поворота сечения В равен:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ}\left(F_1\ K_1^1 + F_2 K_2^1 + F_3 K_3^1\right) = \frac{ql^3}{EJ}\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{37}{48}\frac{ql^3}{EJ}.$$

Знак «+» показывает , что сечение «В» повернется в сторону единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

Учитывая, что $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}23 \cdot 0{,}46^3}{12} = 18{,}7 \cdot 10^{-4}\ м^4$, получим численное значение угла поворота:

$$\theta_B = \frac{37}{48} \cdot \frac{10^4 \cdot 2^3}{10^{10} \cdot 18{,}7 \cdot 10^{-4}} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\ рад.$$

Прогиб т. В равен :

$$y_B = \frac{1}{EJ}\left(F_1\ K_1 + F_2 K_2 + F_3 K_3\right) = \frac{ql^4}{EJ}\left(\frac{1}{48} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{215}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Знак «+» показывает, что т.В сместится в сторону, соответствующую направлению единичной силы, т.е. вниз.

Численное значение прогиба равно:

$$y_B = \frac{215 \cdot 10^4 \cdot 2^4}{384 \cdot 10^{10} \cdot 18{,}7 \cdot 10^{-4}} = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ м = 0{,}24\ см.$$

Задача №2
Изгиб статически определимой прямолинейной
двухопорной балки

Для данной расчетной схемы (рис.5, табл.2) стальной двутавровой балки № 20 требуется:

1. Построить эпюры Q_X и M_X в Н и Нм соответственно (выражать в долях ql и ql^2 не требуется).

2.Найти наибольшее нормальное напряжение по длине балки в МПа и построить эпюру нормальных напряжений по высоте этого сечения.

3. Определить любым способом прогиб на середине пролета в сантиметрах.

Исходные данные :

l = 4 м, E = $2\cdot10^5$ МПа, q = 5 кН/м.

Пример решения задачи №2

Дано: расчетная схема приведена на рис. 6,а, M = 10 кНм, P = 20 кН .

1.Определение реакций R_A и R_B

Обозначим опоры балки т.т. A и B

$$\Sigma M(A) = 0, \quad M + P\frac{l}{2} + q\frac{l}{2}\frac{3}{4}l - R_B l = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P\frac{l}{2} + q\frac{3}{8}l^2}{l} = \frac{10^4 + 2\cdot10^4\cdot2 + 5\cdot10^3\cdot\frac{3}{8}\cdot4^2}{4} = 2\cdot10^4\,H.$$

$$\Sigma M(B) = 0, \quad M + R_A l - P\frac{l}{2} - q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P\frac{l}{2} + q\frac{l^2}{8}}{l} = \frac{-10^4 + 2\cdot10^4\cdot2 + 5\cdot10^3\cdot\frac{4^2}{8}}{4} = 10^4\,H.$$

Проверка $\Sigma y = R_A - P - q\frac{l}{2} + R_A = 10^4 - 2\cdot10^4 - 5\cdot10^3\cdot\frac{4}{2} + 2\cdot10^4 = 0.$

Реакции найдены правильно.

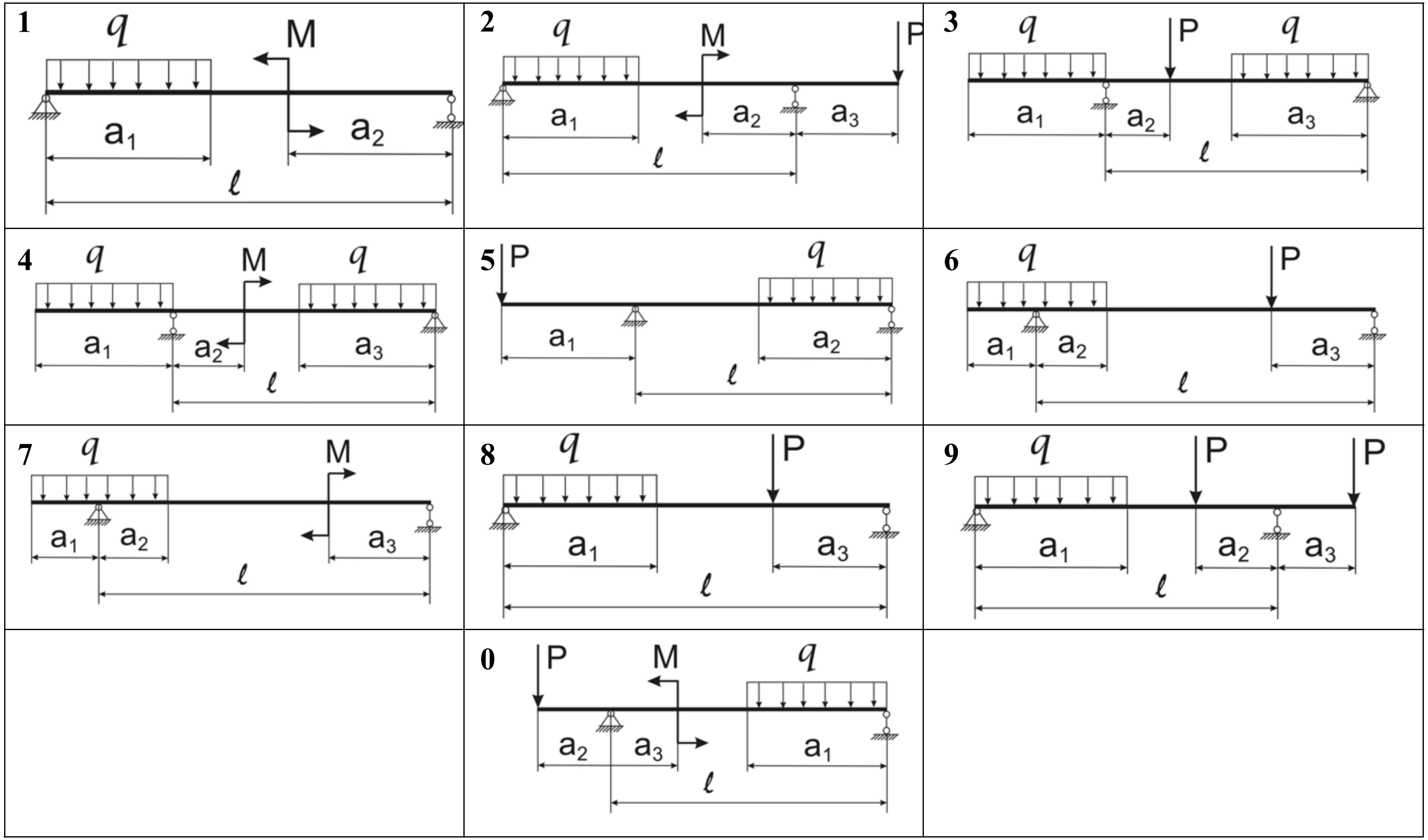

Рис. 5. Двухопорная балка

Таблица 2

№ варианта	$P, кН$	$M, кНм$	a_1	a_2	a_3
1	10	2	l	$3/4l$	$l/2$
2	20	5	$3/4l$	$l/2$	$l/8$
3	30	10	$l/2$	$l/4$	$l/4$
4	40	12	$l/4$	$l/8$	$3/4l$
5	10	8	$l/2$	$l/4$	$l/2$
6	20	2	$3/4l$	$l/2$	$l/4$
7	30	5	l	$3/4l$	$l/8$
8	40	15	l	$l/4$	$l/4$
9	20	5	$l/4$	$l/8$	$l/2$
0	30	4	$l/2$	$l/2$	$3/4l$

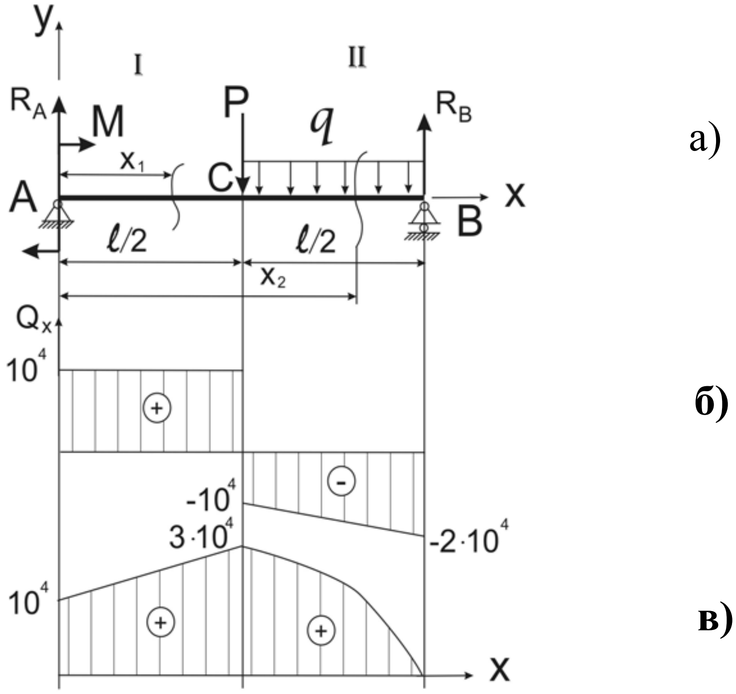

Рис.6. Построение эпюр двухопорной балки

2. Построение эпюр Q_X и M_X

Участок I

$$0 \le x_1 \le l/2 .$$

$Q_{X1} = R_A = 10^4$ Н. Проведем эту линию на первом участке эпюры Q_X (рис. 6,б).

$$M_{X1} = M + R_A x_1, \quad при\ x_1 = 0 \quad M_{X1} = M \ = 10^4\ Нм,$$

$$при\ x_1 = \frac{l}{2} \quad M_{X1} = M + R_A \frac{l}{2} = 10^4 + 10^4 \cdot \frac{4}{2} = 3 \cdot 10^4\ \ Нм$$

Наносим эти точки на эпюру M_X (рис. 6, в) и соединяем прямой линией, т.к. зависимость $M_{X1}(x_1)$ линейна.

Участок 2

$$l/2 \le x_2 \le l$$

$$Q_{X2} = R_A - P - q\left(x_2 - \frac{l}{2}\right), \quad при\ x_2 = \frac{l}{2} \quad Q_{X2} = R_A - P = 10^4 - 2 \cdot 10^4 = -10^4\ Н,$$

$$при\ x_2 = l \quad Q_{X2} = R_A - P - q\left(l - \frac{l}{2}\right) = 10^4 - 2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3 \cdot 2 = -2 \cdot 10^4\ \ Н.$$

Наносим эти две точки на втором участке эпюры Q_X и соединяем их прямой линией:

$$M_{X2} = M + R_A x_2 - P\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) - q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2},$$

$$при\ x_2 = \frac{l}{2} \quad M_{X2} = M + R_A\frac{l}{2} = 10^4 + 10^4\cdot\frac{4}{2} = 3\cdot10^4\ Нм,$$

$$при\ x_2 = l \quad M_{X2} = M + R_A\cdot l - P\left(l - \frac{l}{2}\right) - q\frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^2}{2} = 10^4 + 10^4\cdot4 - 2\cdot10^4\cdot2 - 5\cdot10^3\cdot2 = 0.$$

Наносим эти две точки на втором участке эпюры M_X и соединяем их квадратичной параболой. Выпуклость параболы вверх, вершина находится за пределами участка, т.к. эпюра Q_{X2} не пересекает ось X.

3. Построение эпюры нормальных напряжений по высоте сечения

Наибольший изгибающий момент по длине балки находится в точке с координатой x = $l/2$ (рис. 6,в) (опасное сечение), и его величина равна $3\cdot10^4$ Нм. В этом сечении будет наибольшее нормальное напряжение, определяемое по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{X\max}|}{W} = \frac{3\cdot10^4}{184\cdot10^{-6}} = 1{,}63\cdot10^8\ Н/м^2 = 163МПа.$$

Здесь W - осевой момент сопротивления площади поперечного сечения балки. По [1, с.418] для двутавра №20 W = 184 см^3 = $184\cdot10^{-6}$ м^3.

Эпюру нормальных напряжений по высоте сечения построим, пользуясь формулой

$$\sigma = \pm\frac{|M_{X\max}|}{J}\cdot z.$$

Знак «+» или «-» выбирается в зависимости от того, растянуты волокна в этой зоне или сжаты.

J – момент инерции площади поперечного сечения балки По [1, с.418] для двутавра №20 J = 1840 см^4 = $184\cdot10^{-7}$ м^4;

z - расстояние от нейтральной оси до требуемой точки.

Определить, растянуты волокна, или сжаты, можно с помощью эпюры M_X . Она построена на сжатых волокнах, т.е. если она выше оси X , то сжатые волокна будут выше нейтральной оси.

Высота двутавра №20 равна 20 см = 0,2 м. В точке, наиболее удаленной от нейтральной оси вверх, при z = 0,1 м напряжения будут

$$\sigma = -\frac{3\cdot10^4}{184\cdot10^{-7}}\cdot0{,}1 = -163\ МПа.$$

При z = - 0,1 м $$\sigma = \frac{3\cdot10^4}{184\cdot10^{-7}}\cdot0{,}1 = 163МПа.$$

На нейтральной оси, при z = 0 $\sigma = 0.$

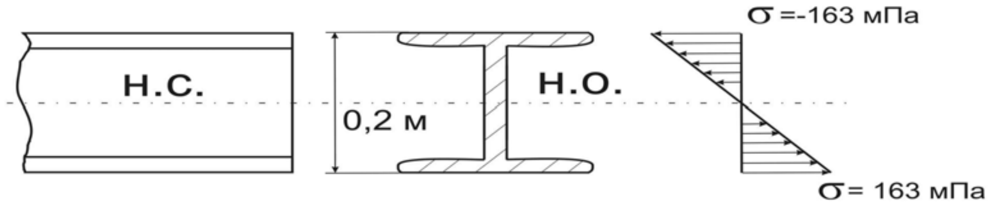

Рис.7. Эпюра нормальных напряжений по высоте опасного сечения

4. Определение прогиба посередине пролета балки

Обозначим середину пролета балки т.С (рис. 6,а). Используем аналитический метод.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на первом участке имеет вид

$$EJy_1'' = M + R_A x_1.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$EJy_1' = M x_1 + R_A \frac{x_1^2}{2} + c_1,$$

$$EJy_1 = M \frac{x_1^2}{2} + R_A \frac{x_1^3}{6} + c_1 x_1 + c_2.$$

На первом участке расположена опора А. Из условий на этой опоре $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Подставляя эти данные в уравнение прогибов на первом участке, получим $c_2 = 0$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на втором участке имеет вид

$$EJy_2'' = M + R_A x_2 - P\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) - q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2}.$$

Проинтегрировав с учетом $c_2 = 0$, получаем:

$$EJy_2' = Mx_2 + R_A \frac{x_2^2}{2} - P\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2} - q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + c_1,$$

$$EJy_2 = M \frac{x_2^2}{2} + R_A \frac{x_2^3}{6} - P\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{6} - q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^4}{24} + c_1 x_2.$$

Опора В расположена на втором участке. Из условий на этой опоре $x_2 = l$, $y_2 = 0$. Подставляя эти условия в уравнение прогибов на втором участке, получаем

$$0 = M\frac{l^2}{2} + R_A\frac{l^3}{6} - P\frac{l^3}{48} - q\frac{l^4}{384} + c_1 l, \textit{ откуда}$$

$$c_1 = -\left(M\frac{l}{2} + R_A\frac{l^2}{6} - P\frac{l^2}{48} - q\frac{l^3}{384} \right) = -\left(10^4\cdot 2 + 10^4\frac{8}{3} - 2\cdot 10^4\cdot\frac{1}{3} - 5\cdot 10^3\cdot\frac{64}{384} \right) =$$
$$= -39{,}2\cdot 10^3\, Нм^2.$$

Чтобы найти прогиб в т. С с координатой х = l/2, необходимо подставить это значение «х» в уравнение прогибов первого или второго участков, т.к. эта точка принадлежит обоим участкам:

$$y_C = \frac{1}{EJ}\left(M\frac{l^2}{8} + R_A\frac{l^3}{48} + c_1\frac{l}{2} \right) = \frac{10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 1840\cdot 10^{-8}}\left(10\cdot\frac{4^2}{8} + 10\cdot\frac{4^3}{48} - 39{,}2\cdot\frac{4}{2} \right) =$$
$$= -0{,}0123\, м = -1{,}2\ см.$$

Знак «-» показывает, что т. С сместится вниз.

Задача №3
Изгиб статически неопределимой двутавровой балки

Для данной расчетной схемы (рис.8, табл.3) статически неопределимой двутавровой балки требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Построить эпюры Q_X и M_X в Н и Нм соответственно.
3. Подобрать номер двутавра.

Исходные данные :

l = 6 м, [σ] = 160 МПа

Пример решения задачи №3

Дано: расчетная схема приведена на рис. 9,а, q = 10 кН/м, a = 2/3 l = 4м.

1.Раскрытие статической неопределимости

Назначаем реакции в опорах А и В. Это реактивные моменты M_A и $M_{B,}$

а также реактивные силы R_A и $R_{B.}$ Уравнения моментов относительно опор имеют вид:

$$\Sigma M(A) = 0 \qquad -M_A + q\cdot\frac{2}{3}l\cdot\left(l - \frac{l}{3}\right) - R_B l + M_B = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma M(B) = 0 \qquad -M_A + R_A l - q\frac{2}{3}l\cdot\frac{l}{3} + M_B = 0. \qquad (2)$$

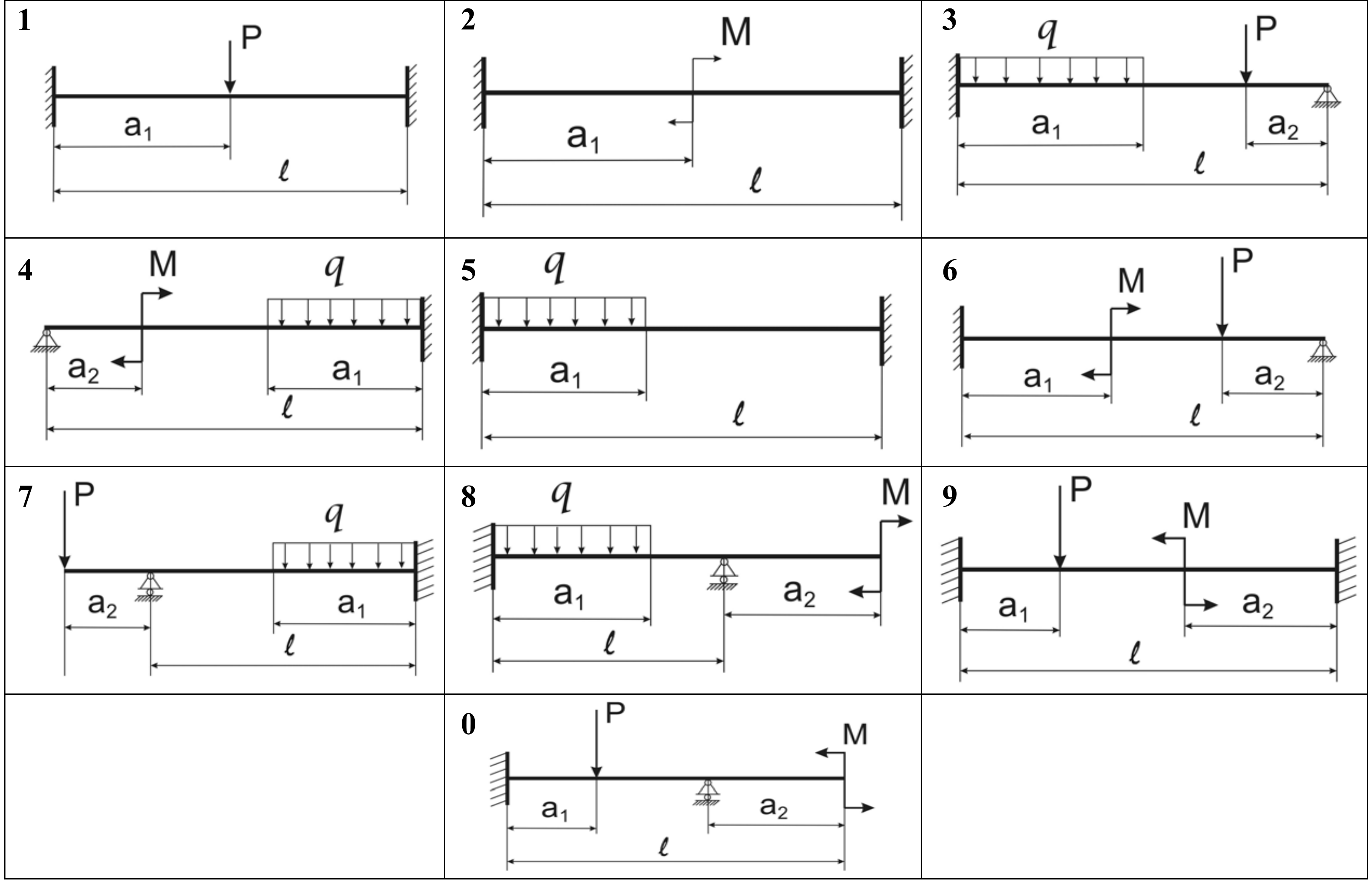

Рис. 8. Статически неопределимая балка

Таблица №3

№ варианта	$q, кН/м$	$P, кН$	$M, кНм$	a_1	a_2
1	5	6	20	$l/4$	$l/2$
2	8	10	15	$l/2$	$l/4$
3	4	15	10	$3/4l$	$3/4l$
4	3	20	12	$l/2$	$l/4$
5	10	5	12	$l/4$	$l/2$
6	9	12	10	$l/8$	$l/4$
7	7	8	15	$l/2$	$3/4l$
8	5	10	10	$3/4l$	$l/2$
9	4	10	15	$l/4$	$l/2$
0	10	5	12	$l/2$	$l/4$

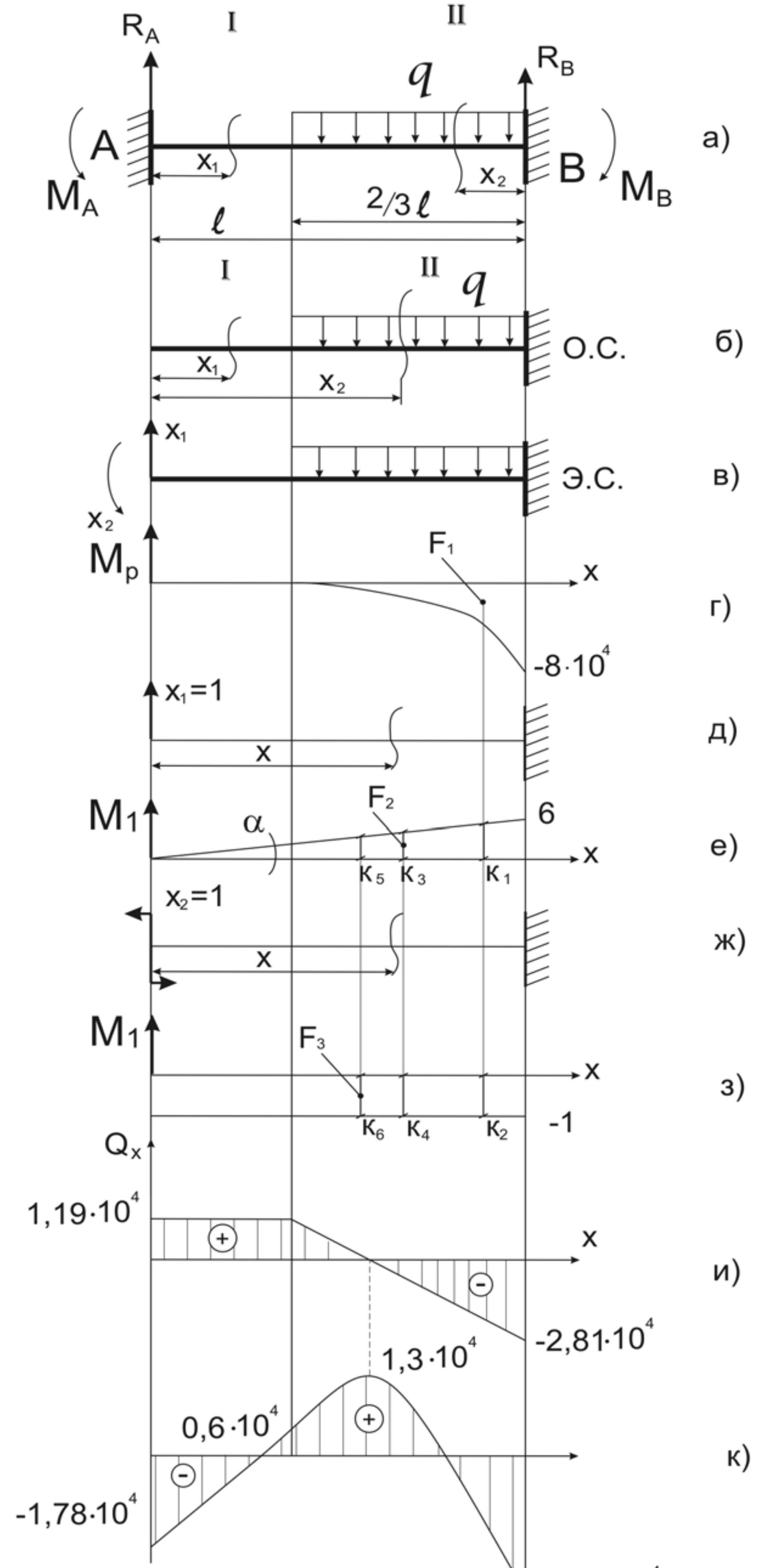

Рис.9 Построение эпюр двутавровой балки

В двух уравнениях статики 4 неизвестные реакции, следовательно, задача 2 раза статически неопределима.

Для раскрытия статической неопределимости используем метод сил. Система канонических уравнений метода сил для 2 раза статически неопределимой задачи имеет вид

$$\begin{cases} \Delta_{1P} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0, \\ \Delta_{2P} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0. \end{cases}$$

За лишние неизвестные X_1 и X_2 примем реакции в опоре А: $X_1 = R_A$,
$X_2 = M_A$. Основная система представлена на рис. 9,б.
Эквивалентная система представлена на рис. 9,в. Для определения коэффициентов системы канонических уравнений необходимо построить грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов. Грузовая эпюра M_P строится по основной системе (рис. 9,б).

<u>Участок I</u>

$$0 \le x_1 \le l/3, \qquad M_{P1} = 0.$$

<u>Участок 2</u>

$$l/3 \le x_2 \le l, \qquad M_{P2} = -q\frac{\left(x_2 - \frac{l}{3}\right)^2}{2},$$

$$при \quad x_2 = \frac{l}{3} \quad M_{P2} = 0,$$

$$при \;\; x_2 = l \quad M_{P2} = -q\frac{\left(l - \frac{l}{3}\right)^2}{2} = -10^4 \cdot \frac{4^2}{2} = -8 \cdot 10^4 \;\; Нм.$$

Чтобы найти положение вершины параболы, составим уравнение Q_{X2} и приравняем ее к нулю:

$$Q_{X2} = -q\left(x_2 - \frac{l}{3}\right) = 0 \to x_2 = \frac{l}{3},$$

т.е. вершина параболы находится на границе I и II участков и принадлежит
2 участку. Эпюра M_P приведена на рис. 9,г. Площадь этой эпюры

$$F_1 = \frac{1}{3}\left(-8 \cdot 10^4\right) \cdot 4 = -10{,}7 \cdot 10^4 \;\; Нм^2.$$

Единичную эпюру M_1 построим из предположения, что $X_1 = 1$ (рис.9,д):

$$0 \le x \le l, \;\; M_1 = 1 \cdot x \;, \text{ при } x = 0 \quad M_1 = 0,$$
$$\text{при } x = l \quad M_1 = 6 \text{ Нм}.$$

Эпюра M_1 приведена на рис. 9,е. Ее площадь

$$F_2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 = 18 \;\; Нм^2.$$

Единичную эпюру M_2 построим из предположения , что $X_2 = 1$ (рис.9,ж):

$$0 \le x \le l, \quad M_2 = -1.$$

Эпюра M_2 приведена на рис. 9,з. Ее площадь

$$F_3 = (-1) \cdot 6 = -6 \; Нм^2.$$

Спроецируем центры тяжестей площадей F_1 , F_2 и F_3 на единичные эпюры M_1 и M_2 и найдем ординаты K_1 , K_2, K_3 ,K_4, K_5 и K_6 :

$$tq\ \alpha = 6 / 6 = 1,$$

$$K_1 = \left(\frac{l}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} l\right) tg\alpha = \frac{5}{6} l = 5\,м; \quad K_2 = -1,$$

$$K_3 = \frac{2}{3} l \cdot tg\alpha = 4\,м; \quad K_4 = -1,$$

$$K_5 = \frac{l}{2} tg\alpha = 3\,м; \quad K_6 = -1.$$

Первый индекс коэффициентов системы канонических уравнений показывает, какая эпюра является единичной, т.е. с какой эпюры брать соответствующую ординату, второй индекс – какая грузовая , т.е. с какой эпюры брать соответствующую площадь:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \cdot F_1 K_1 = \frac{\left(-10{,}7 \cdot 10^4\right) \cdot 5}{EJ} = -\frac{53{,}5 \cdot 10^4}{EJ},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot F_2 K_3 = \frac{18 \cdot 4}{EJ} = \frac{72}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \cdot F_3 K_5 = \frac{(-6) \cdot 3}{EJ} = -\frac{18}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EJ} \cdot F_1 K_2 = \frac{\left(-10{,}7 \cdot 10^4\right) \cdot (-1)}{EJ} = \frac{10{,}7 \cdot 10^4}{EJ},$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot F_2 K_4 = \frac{18 \cdot (-1)}{EJ} = -\frac{18}{EJ},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot F_3 K_6 = \frac{(-6) \cdot (-1)}{EJ} = \frac{6}{EJ}.$$

Во всех коэффициентах присутствует сомножитель 1/EJ , поэтому, подставив коэффициенты в систему канонических уравнений, можно сократить на этот сомножитель. После сокращения получаем

$$\begin{cases} -53{,}5 \cdot 10^4 + 72X_1 - 18X_2 = 0, \\ 10{,}7 \cdot 10^4 - 18X_1 + 6X_2 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на 3 и сложим оба уравнения:

$$\begin{cases} -53{,}5 \cdot 10^4 + 72X_1 - 18X_2 = 0 \\ 32{,}1 \cdot 10^4 - 54X_1 + 18X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\quad -21{,}4 \cdot 10^4 + 18X_1 = 0 \quad},$$

откуда $X_1 = 1{,}19\cdot10^4$ Н, т.е. $R_A = 1{,}19\cdot10^4$ Н.

Величину X_2 найдем из любого, например второго, уравнения системы:

$$X_2 = \frac{18X_1 - 10{,}7\cdot10^4}{6} = \frac{18\cdot1{,}19\cdot10^4 - 10{,}7\cdot10^4}{6} = 1{,}78\cdot10^4\ Нм,$$

т.е. $M_A = 1{,}78\cdot10^4$ Нм.

Подставим найденные значения в уравнение (2) моментов:

$$M_B = M_A - R_A l + \frac{2}{9}ql^2 = 1{,}78\cdot10^4 - 1{,}19\cdot10^4\cdot6 + \frac{2}{9}\cdot10^4\cdot6^2 = 2{,}64\cdot10^4\ Нм.$$

Подставим M_A и M_B в уравнение (1) моментов:

$$R_B = \frac{-M_A + \frac{4}{9}ql^2 + M_B}{l} = \frac{-1{,}78\cdot10^4 + \frac{4}{9}\cdot10^4\cdot6^2 + 2{,}64\cdot10^4}{6} = 2{,}81\cdot10^4\ Н.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = R_A - q\cdot\frac{2}{3}l + R_B = 1{,}19\cdot10^4 - 10^4\cdot4 + 2{,}81\cdot10^4 = 0,$$

т.е. реакции найдены правильно и статическая неопределимость раскрыта.

2. Построение эпюр Q_X и M_X

Эпюры строятся по заданной схеме балки (рис.9,а).

Участок I

$$0 \le x_1 \le l/3\ .$$

$$Q_{X1} = R_A = 1{,}19\cdot10^4\ Н.$$

$$M_{X1} = -M_A + R_A x_1 \quad при\ x_1 = 0 \quad M_{X1} = -M_A = -1{,}78\cdot10^4\ Нм,$$

$$при\ x_1 = \frac{l}{3} \quad M_{X1} = -M_A + R_A\frac{l}{3} = -1{,}78\cdot10^4 + 1{,}19\cdot10^4\cdot2 = 0{,}6\cdot10^4\ Нм.$$

Участок 2

$$0 \le x_2 \le 2/3\ l,$$

$$Q_{X2} = -R_B + qx_2, \quad при\ x_2 = 0\ \ Q_{X2} = -R_B = -2{,}81\cdot10^4\ Н,$$

$$при\ x_2 = \frac{2}{3}l \quad Q_{X2} = -R_B + q\cdot\frac{2}{3}l = -2{,}81\cdot10^4 + 10^4\cdot4 = 1{,}19\cdot10^4\ Н.$$

$$M_{X2} = -M_B + R_B x_2 - q\frac{x_2^{\,2}}{2},$$

$$при\ x_2 = 0 \quad M_{X2} = -M_B = -2{,}64 \cdot 10^4 \ Нм,$$

$$при\ x_2 = \frac{2}{3}l \quad M_{X2} = -M_B + R_B \cdot \frac{2}{3}l - q\frac{4}{18}l^2 = -2{,}64 \cdot 10^4 + 2{,}81 \cdot 10^4 \cdot 4 -$$

$$-10^4 \cdot 8 = 0{,}6 \cdot 10^4 = Нм.$$

Определим координату вершины параболы на 2 участке:

$$Q_{X2} = -R_B + qx_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{R_B}{q} = \frac{2{,}81 \cdot 10^4}{10^4} = 2{,}81\, м.$$

Тогда изгибающий момент в вершине параболы будет

$$M_{X2} = -M_B + R_B \cdot 2{,}81 - q\frac{2{,}81^2}{2} = -2{,}64 \cdot 10^4 + 2{,}81 \cdot 10^4 \cdot 2{,}81 - 10^4 \cdot \frac{2{,}81^2}{2} = 1{,}3 \cdot 10^4 \, Нм.$$

3. Определение номера двутавра

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид:

$$\sigma = \frac{|M_{X\max}|}{W} \le [\sigma],$$

откуда

$$W \ge \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{2{,}64 \cdot 10^4}{160 \cdot 10^6} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}\, см^3 = 165\, см^3.$$

По [1, с.418] находим, что ближайшее большее значение момента сопротивления имеет двутавр № 20, у которого W = 184 $см^4$. Этот двутавр будет удовлетворять условию прочности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] /под ред. В.К. Качурина - М.: Наука, 1970. – 432 с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст]/ Н.М. Беляев. – М., 1976. – 608 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст]/ В. И. Феодосьев. – М., 1970. – 544 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к расчетно-графическим работам № 2 и № 3 по курсу

«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

для студентов спец. 280300 (260704), 280400 (260703), 330500 (280102), 280800 (260901), 280900 (260902), 170700 (150406), 230700 (100101)

Составители: Сергей Михайлович Иванов

Татьяна Витальевна Шмелева

Екатерина Витальевна Полякова

Сергей Львович Халезов

Научный редактор В.А. Суров

Редактор Е.Н. Платова

Корректор Е.Г. Бабаскина

Подписано в печать 25.07.07.

Формат 1/16 60×84. Бумага писчая. Плоская печать.

Усл.печ.л. 1,63. Уч.-изд.л.1,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел Ивановской государственной текстильной академии

Отдел оперативной полиграфии

153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса,21