

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Ивановский государственный политехнический университет»

## **КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

*Рекомендовано учебно-методическим советом ИВГПУ  
в качестве учебного пособия для студентов направлений подготовки  
бакалавров 15.03.02 Технологические машины и оборудование,  
29.03.02 Технология и проектирование текстильных изделий  
и 22.03.01 Материаловедение и технологии материалов*

Иваново 2017

УДК 531.8(075.8)

Авторы:

*А. А. Тувин, А. Н. Смирнов, В. В. Бонокин,  
Р. В. Шляпугин, Д. А. Пирогов, С. В. Селезнев*

**Кинематический и динамический анализ плоских рычажных механизмов:** учеб. пособие / А. А. Тувин [и др.]. – Иваново: ИВГПУ, 2017. – 112 с.

В учебном пособии изложены принципы различных исследований механизмов: кинематического – методом планов скоростей и ускорений; силового – методом кинетостатики; динамического – с расчетом маховика в двух исполнениях. Дано теоретическое обоснование и практическое представление рассматриваемых вопросов.

Пособие может быть использовано при выполнении курсового проекта студентами направлений подготовки бакалавров *15.03.02 Технологические машины и оборудование, 29.03.02 Технология и проектирование текстильных изделий и 22.03.01 Материаловедение и технологии материалов.*

***Рецензенты:***

кафедра теоретической и прикладной механики  
Ивановского государственного энергетического университета  
им. В. И. Ленина (заведующий кафедрой д-р физ.-мат. наук, доц. ***Л. Б. Маслов***);  
канд. техн. наук, доц., доцент кафедры механики и компьютерной графики  
Ивановского государственного химико-технологического университета  
***Б. Р. Киселев***

ISBN 978-5-88954-456-2

© ФГБОУ ВО «ИВГПУ», 2017  
© Тувин А. А., Смирнов А. Н., Бонокин В. В.,  
Шляпугин Р. В., Пирогов Д. А., Селезнев С. В., 2017

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>Введение</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Кинематический расчет механизма</b> .....	<b>7</b>
1.1. Задачи и порядок кинематического исследования плоских стержневых механизмов .....	7
1.2. Структурный анализ механизма .....	8
1.2.1. Подвижность механизма .....	10
1.2.2. Выделение групп Ассура и первичного механизма .....	11
1.2.3. Формула строения механизма .....	13
1.3. Построение плана механизма .....	14
1.4. Построение плана скоростей .....	24
1.4.1. Определение линейной скорости точки $A$ .....	25
1.4.2. Выбор масштабного коэффициента плана скоростей .....	27
1.4.3. Определение скорости точки $A'$ .....	28
1.4.4. Определение скоростей характерных точек $S_1$ , $S_3$ и $C$ .....	32
1.4.5. Определение скорости точки $C'$ .....	34
1.4.6. Определение истинных значений линейных скоростей характерных точек звеньев механизма .....	38
1.4.7. Определение значений угловых скоростей звеньев .....	39
1.5. Построение плана ускорений .....	40
1.5.1. Ускорение точки $A$ .....	40
1.5.2. Масштабный коэффициент плана ускорений .....	41
1.5.3. Ускорение точки $A'$ .....	43
1.5.4. Определение ускорений характерных точек группы 2–3 .....	53
1.5.5. Ускорение точки $C'$ .....	55
1.5.6. Определение истинных значений линейных ускорений точек звеньев .....	59
1.5.7. Определение угловых ускорений звеньев .....	59

<b>2. Силовой расчет механизмов методом кинетостатики .....</b>	<b>61</b>
2.1. Задачи и методы силового расчета механизмов .....	61
2.2. Определение сил инерции звеньев механизма .....	62
2.3. Условие статической определимости кинематической цепи .....	65
2.4. Исходные данные для силового расчета .....	68
2.5. Порядок силового расчета .....	69
2.5.1. <i>Определение внешних сил .....</i>	69
2.5.2. <i>Кинетостатический расчет группы Ассура 4–5 .....</i>	72
2.5.3. <i>Кинетостатический расчет группы Ассура 2–3 .....</i>	79
2.5.4. <i>Силовой анализ механизма I класса (звенья 0, 1) .....</i>	84
2.5.5. <i>Определение уравновешивающей силы при помощи теоремы Жуковского о жестком рычаге .....</i>	88
<b>3. Определение момента инерции маховика .....</b>	<b>91</b>
3.1. Средняя скорость главного вала и коэффициент неравномерности ...	91
3.2. Приведение сил и масс .....	93
3.3. Задача расчета маховых колес .....	95
3.4. Определение момента инерции махового колеса методом энерго-масс (метод Виттенбауэра) .....	96
3.5. Метод Мерцалова .....	101
3.5.1. <i>Теоретическое обоснование метода .....</i>	101
3.5.2. <i>Порядок выполнения расчетов по методу Мерцалова .....</i>	105
3.6. Определение основных размеров махового колеса .....	105
3.7. Выбор места установки маховика .....	108
<b><i>Библиографический список.....</i></b>	<b>111</b>

## *Введение*

Предмет теории механизмов и машин (ТММ), входящий в программу курса технической и прикладной механики, рассматривает общие методы исследования и проектирования (синтеза) механизмов и машин.

ТММ входит в общетехнический цикл дисциплин, формирующих знания инженера по проектированию и эксплуатации машин, изучает методы проектирования схем машин, которые являются общими для различных областей техники, базируется на законах и положениях теоретической механики и решает две основные задачи – анализа и синтеза механизмов. ТММ является основой для последующего изучения специальных видов машин.

Курсовое проектирование способствует закреплению, углублению и обобщению, а также применению теоретических знаний при комплексном решении конкретной инженерной задачи по исследованию и расчету механизмов и машин.

Цель выполнения курсовой работы по ТММ – приобретение студентами практических навыков применения изученных ими общих методов проектирования и исследования механизмов и машин: их структуры, кинематических и динамических свойств.

Курсовая работа (проект) по ТММ выполняется студентом по индивидуальному заданию самостоятельно. Задание на проект включает вопросы по структурному, кинематическому и динамическому исследованию заданного механизма. Каждому разделу проекта соответствует графическая часть (по ГОСТ 2.109-73, 2.770-68) и пояснительная записка (по ГОСТ 2.105-95), содержащая необходимые расчеты.

Графическая часть курсового проекта выполняется на трех листах формата А1. На первом листе – кинематический расчет рычажного механизма методом планов скоростей и ускорений, на втором – кинетостатический анализ методом планов сил, на третьем – расчет маховика методом энергомасс. Пояснительная записка составляется на листах формата А4.

В пособии излагается методика работы над разделами курсового проекта по теории механизмов и машин, посвященных проектированию и анализу рычажного механизма. Содержание разделов с комментариями и пояснениями отражает последовательное, поэтапное выполнение работы, т. е. является планом работы над проектом.

Исследование рычажных механизмов проводится графоаналитическим методом. При решении задач, предусмотренных заданием, рекомендуется использовать графические методы на базе расчетных кинематических и силовых параметров. Это позволяет наглядно продемонстрировать закономерности и взаимосвязь реально действующих сил в звеньях и шарнирах механизма в зависимости от заданного закона движения и сил сопротивления, дает понимание причин возникновения сил, их величин и направлений, что важно при изучении курсов «Сопротивление материалов» и «Детали машин», где рассматриваются вопросы деформации от действующих сил в звеньях и соединениях и производятся расчеты деталей на прочность и жесткость.

Кинематический расчет механизма выполняется методом планов, обладающим простотой и наглядностью. Расчет позволяет определить координаты, величины и направления скоростей и ускорений точек и звеньев механизма в конкретный момент времени.

Силовой расчет механизма ставит задачу определения реакций в кинематических парах и уравновешивающей силы, приложенной к входному звену. Расчет проводится по упрощенной схеме, без учета сил трения. Однако получаемое приближенное решение для большинства технических расчетов вполне удовлетворяет требованиям практики.

При динамическом анализе определяется величина маховых масс, требующихся для обеспечения неравномерности хода механизма в заданных пределах.

Предлагаемое пособие полностью соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины, утвержденному Минобрнауки Российской Федерации.

# 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА

## 1.1. Задачи и порядок кинематического исследования плоских стержневых механизмов

При кинематическом анализе механизмов определяют движение звеньев без учета сил, вызывающих это движение. В результате кинематического анализа должны быть последовательно определены:

- положения звеньев и траектории, описываемые отдельными точками механизма;
- линейные скорости отдельных точек звеньев и угловые скорости звеньев;
- линейные ускорения отдельных точек звеньев и угловые ускорения звеньев.

Кинематический анализ в большинстве случаев достаточно провести для одного периода установившегося движения механизма.

Исследование механизма ведется в следующем порядке: сначала исследуется движение входных звеньев, а затем выполняется кинематический анализ отдельных групп Ассур в порядке их присоединения при образовании механизма.

Такой порядок кинематического исследования объясняется тем, что для анализа каждой группы Ассур должны быть известны положения, скорости и ускорения элементов кинематических пар, которыми данная группа присоединяется к механизму. Следовательно, к кинематическому анализу следует приступать лишь после того, как произведен структурный анализ механизма и установлен порядок присоединения групп Ассур.

При кинематическом анализе механизмов пользуются либо аналитическими методами, либо графоаналитическими (метод планов скоростей и ускорений и метод кинематических диаграмм), которые можно реализовать и с применением информационно-компьютерных технологий.

## 1.2. Структурный анализ механизма

*Механизмом* называется искусственно созданная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Механизм состоит из отдельных тел (звеньев), движение которых ограничено.

Задача анализа механизма возможна только в том случае, если известны составляющие его элементы и условия их соединения. Поэтому необходимо знать законы образования механизмов, т. е. их структуру и классификацию.

Структура, т. е. строение, механизмов имеет очень большое значение как при синтезе механизма, помогая наиболее рационально сконструировать его для осуществления заданного движения, так и при анализе выполненных механизмов для выбора соответствующих методов исследования.

Структурный анализ позволяет определить число входных звеньев, соответствующее числу обобщенных координат, от которых зависит положение остальных звеньев механизма.

Кроме того, кинематическое и силовое исследование механизма проводится по структурным группам (группам Ассура) в соответствии со структурной формулой строения (в прямой и обратной последовательности соответственно).

При решении первой задачи необходимо:

1. Определить число степеней свободы заданного механизма по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2, \quad (1.1)$$

где  $W$  – число степеней свободы механизма относительно стойки;

$n$  – число подвижных звеньев механизма;

$p_1$  – число одноподвижных кинематических пар (шарниры, поступательные пары);

$p_2$  – число двухподвижных кинематических пар.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой.

*Кинематической цепью* называется связанная система звеньев, образующих между собой *кинематические пары*. Кинематическая пара называется *низшей*, если образующие ее звенья соприкасаются по поверхности. *Поступательная* кинематическая пара допускает прямолинейное относительное движение звеньев. *Вращательная* кинематическая пара допускает вращательное относительное движение звеньев.

2. Определить группы Ассура, из которых образован заданный механизм.

*Группой Ассура* называется кинематическая цепь, состоящая только из подвижных звеньев с одноподвижными кинематическими парами, имеющая нулевую подвижность и превращающаяся в ферму, если свободные элементы крайних пар соединить со стойкой.

При отделении групп Ассура от механизма необходимо придерживаться следующего правила: первой отделяется группа Ассура, наиболее удаленная от входного звена; причем после отделения этой группы оставшийся механизм должен иметь то же число степеней свободы, что и заданный механизм, а траектория движения оставшихся звеньев не меняется.

Подобное отделение проводится до тех пор, пока не останется одно входное звено со стойкой, т. е. *механизм I класса* (несколько механизмов I класса).

3. На основании проведенного структурного анализа записать формулу структурного построения механизма. Вначале записывается механизм I класса, а затем группы Ассура в порядке, обратном отделению этих групп при структурном анализе, где римскими цифрами обозначен класс группы Ассура, арабскими – номера звеньев, входящих в данную группу.

Класс механизма определяется высшим классом группы Ассура, входящей в механизм.

Таким образом, формула структурного строения механизма показывает принцип построения механизма из различных групп Ассур. Кроме того, эта формула является основой при вычерчивании кинематической схемы (плана) механизма и при его кинематическом анализе.

Проведем структурный анализ рассматриваемого механизма (рис. 1.1) в соответствии с вышеизложенной последовательностью (в порядке, указанном выше).

### 1.2.1. Подвижность механизма

Определим количество кинематических пар (кп), входящих в механизм (см. рис. 1.1). Результаты заносим в таблицу (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Таблица кинематических пар

Обозначения кп	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>A'</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C'</i>	<i>X</i>
Звенья, образующие кп	<i>0, 1</i>	<i>1, 2</i>	<i>2, 3</i>	<i>0, 3</i>	<i>3, 4</i>	<i>4, 5</i>	<i>0, 5</i>
Наименование кп	Низш. вращ.	Низш. вращ.	Низш. поступ.	Низш. вращ.	Низш. вращ.	Низш. поступ.	Низш. поступ.
Подвижность кп	Одноподвижные						

Согласно табл. 1.1, имеем

$$n = 5(1, 2, 3, 4, 5);$$

$$p_1 = 7(O, A, A', B, C, C', X);$$

$$p_2 = 0.$$

Тогда, применяя формулу (1.1), получим

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1. \quad (1.2)$$

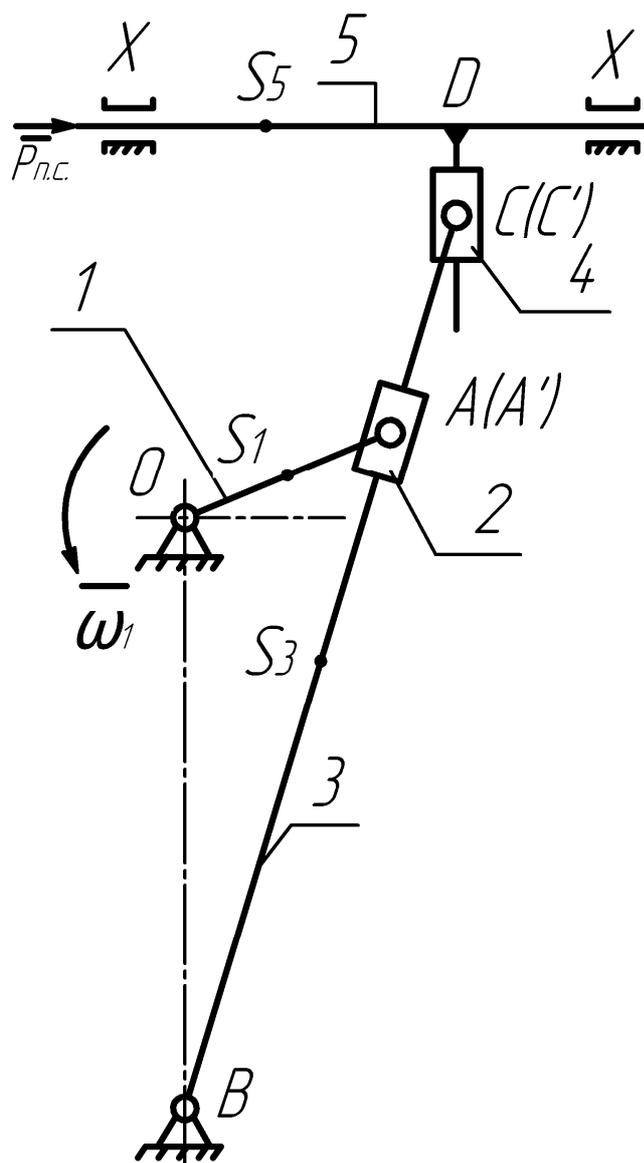


Рис. 1.1

### 1.2.2. Выделение групп Ассура и первичного механизма

Выделение начинается с группы Ассура, которой принадлежит выходное звено (к которому приложена сила полезного сопротивления). Выделим кинематическую цепь, состоящую из выходного звена 5 и звена 4 (рис. 1.2).

Для проверки по формуле (1.1) найдем подвижность полученной кинематической цепи:

$$n = 2 (5, 4); p_1 = 3 (X, C \text{ и } C'); p_2 = 0.$$

Тогда

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0. \tag{1.3}$$

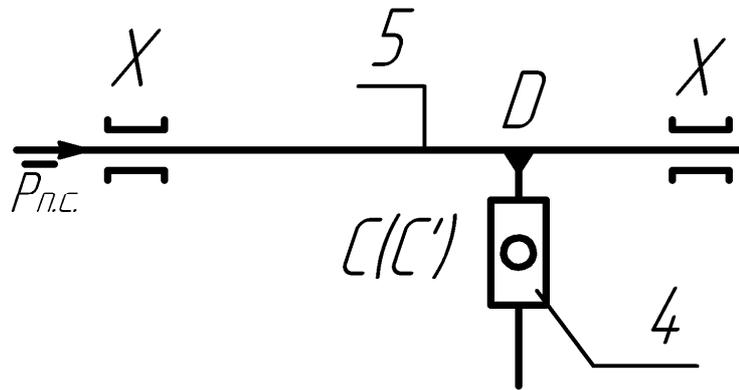


Рис. 1.2

Одни и те же звенья и кинематические пары не могут входить в разные группы Ассура. Поэтому после выделения группы 4–5 получим кинематическую цепь (рис. 1.3, а). Объединим наиболее удаленное от входного звено 3 с соединенным с ним звеном 2 (рис. 1.3, б). Поскольку кинематическая пара  $C$  входит в отделенную группу 4–5, то на звене 3 она отсутствует. Степень подвижности кинематической цепи 2–3 равна нулю:

$$n = 2 (3, 2);$$

$$p_1 = 3 (B, A \text{ и } A');$$

$$p_2 = 0.$$

Отсюда 
$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0. \quad (1.4)$$

После выделения всех групп Ассура должны остаться один или несколько механизмов I класса (в соответствии с подвижностью всего механизма).

*Механизмом I класса (или первичным механизмом)* называется соединение входного звена и стойки (неподвижного звена, корпуса машины).

Кинематическая пара  $A$  входит в группу 2–3. Для механизма I класса (рис. 1.4) степень подвижности равна единице. Эта величина показывает число обобщенных координат механической системы:

$$n = 1 (1);$$

$$p_1 = 1 (O);$$

$$p_2 = 0.$$

Получим 
$$W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1. \quad (1.5)$$

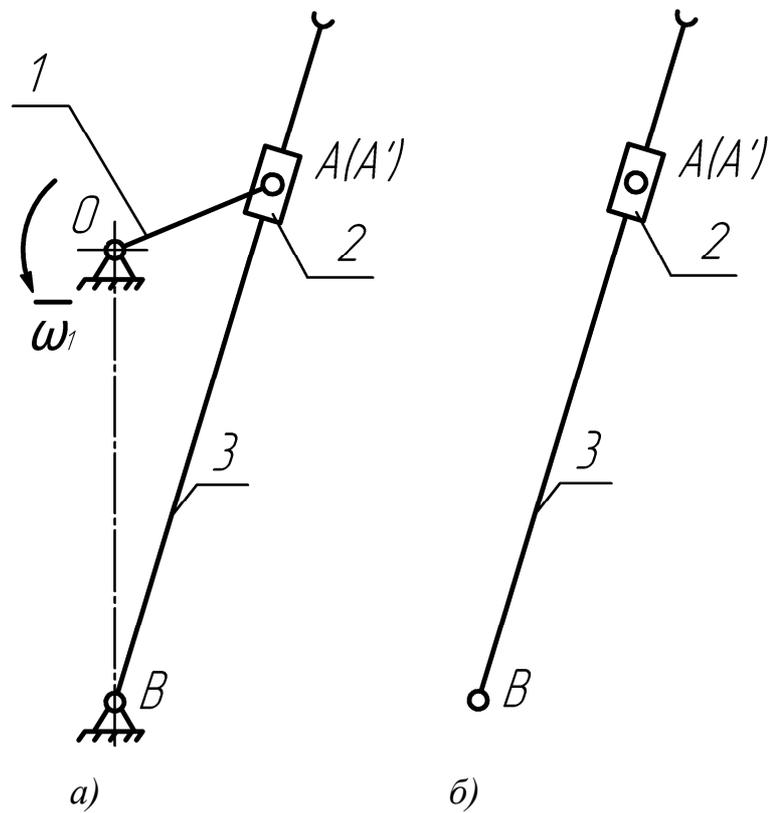


Рис. 1.3

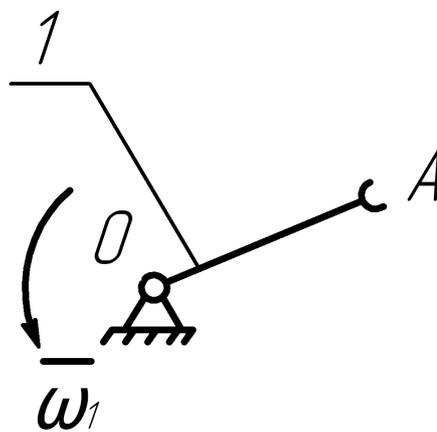


Рис. 1.4

### 1.2.3. Формула строения механизма

Результат структурного анализа сводится в формулу строения механизма. Формула строения механизма имеет вид

$$I(0, 1) \rightarrow II(2, 3) \rightarrow II(4, 5). \quad (1.6)$$

### 1.3. Построение плана механизма

Определения координат звеньев механизма осуществляется с помощью построения плана механизма. *Планом механизма* называется графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее выбранному моменту времени. Для построения планов положения механизма выбирается масштабный коэффициент длин  $\mu_l$  (отношение реальной величины к ее изображению на плане), который определяется по формуле

$$\mu_l = \frac{l}{\bar{l}}, \quad (1.7)$$

где  $l$  – действительный размер звена, м;

$\bar{l}$  – размер звена, принятый на схеме механизма, мм.

Таким образом, масштаб длин имеет размерность м/мм.

Рекомендуемые величины масштабного коэффициента устанавливаются в ГОСТ 2.302-68 (табл. 1.2).

*Таблица 1.2*

*Рекомендуемые значения масштабных коэффициентов длин*

$\mu_l$ , м/мм	Масштаб
0,001	1 : 1
0,002	1 : 2
0,005	1 : 5
0,01	1 : 10
0,02	1 : 20
0,05	1 : 50
0,1	1 : 100
0,2	1 : 200
0,5	1 : 500
1	1 : 1000

Построим план механизма, представленного на рис. 1.1.

Заданный механизм содержит один механизм I класса. Положения звеньев механизма зависят от единственной обобщенной координаты – угла поворота входного звена (кривошипа  $l$ ).

Исходными данными для расчета являются геометрические размеры механизма и закон движения входного звена (с частотой вращения  $n_1 = const$ ):

$$l_{OA} = 0,225 \text{ м}; \quad l_{BC} = 0,95 \text{ м}; \quad l_{OB} = 0,6 \text{ м}; \quad l_{BS_3} = 0,475 \text{ м};$$

$$l_{OS_1} = 0,1125 \text{ м}; \quad l_{OX} = 0,4 \text{ м}; \quad l_{DS_5} = 0,1 \text{ м}; \quad n_1 = 48 \text{ мин}^{-1}.$$

Для изображения плана механизма необходимо выбрать величину масштабного коэффициента, исходя из площади поля чертежа:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}; \quad (1.8)$$

$$\mu_l = \frac{0,225}{45} = 0,005 \text{ м/мм}. \quad (1.9)$$

Определим длины отрезков, изображающих звенья на плане механизма:

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,95}{0,005} = 190 \text{ мм}; \quad (1.10) \quad OB = \frac{l_{OB}}{\mu_l} = \frac{0,6}{0,005} = 120 \text{ мм}; \quad (1.11)$$

$$OS_1 = \frac{l_{OS_1}}{\mu_l} = \frac{0,1125}{0,005} = 22,5 \text{ мм}; \quad (1.12) \quad BS_3 = \frac{l_{BS_3}}{\mu_l} = \frac{0,475}{0,005} = 95 \text{ мм}; \quad (1.13)$$

$$DS_5 = \frac{l_{DS_5}}{\mu_l} = \frac{0,1}{0,005} = 20 \text{ мм}; \quad (1.14) \quad OX = \frac{l_{OX}}{\mu_l} = \frac{0,4}{0,005} = 80 \text{ мм}. \quad (1.15)$$

Как показано ранее (см. формулу (1.6)), к механизму I класса (звенья  $0, l$ ) последовательно присоединены две группы Ассур: II (2, 3) и II (4, 5).

Построение плана механизма в выбранном масштабе начинают с изображения кинематических пар  $O, B$  и  $X-X$  (рис. 1.5), которыми подвижные звенья присоединяются к стойке, а их координаты имеются в исходных данных (см. выражения (1.10)–(1.15)).

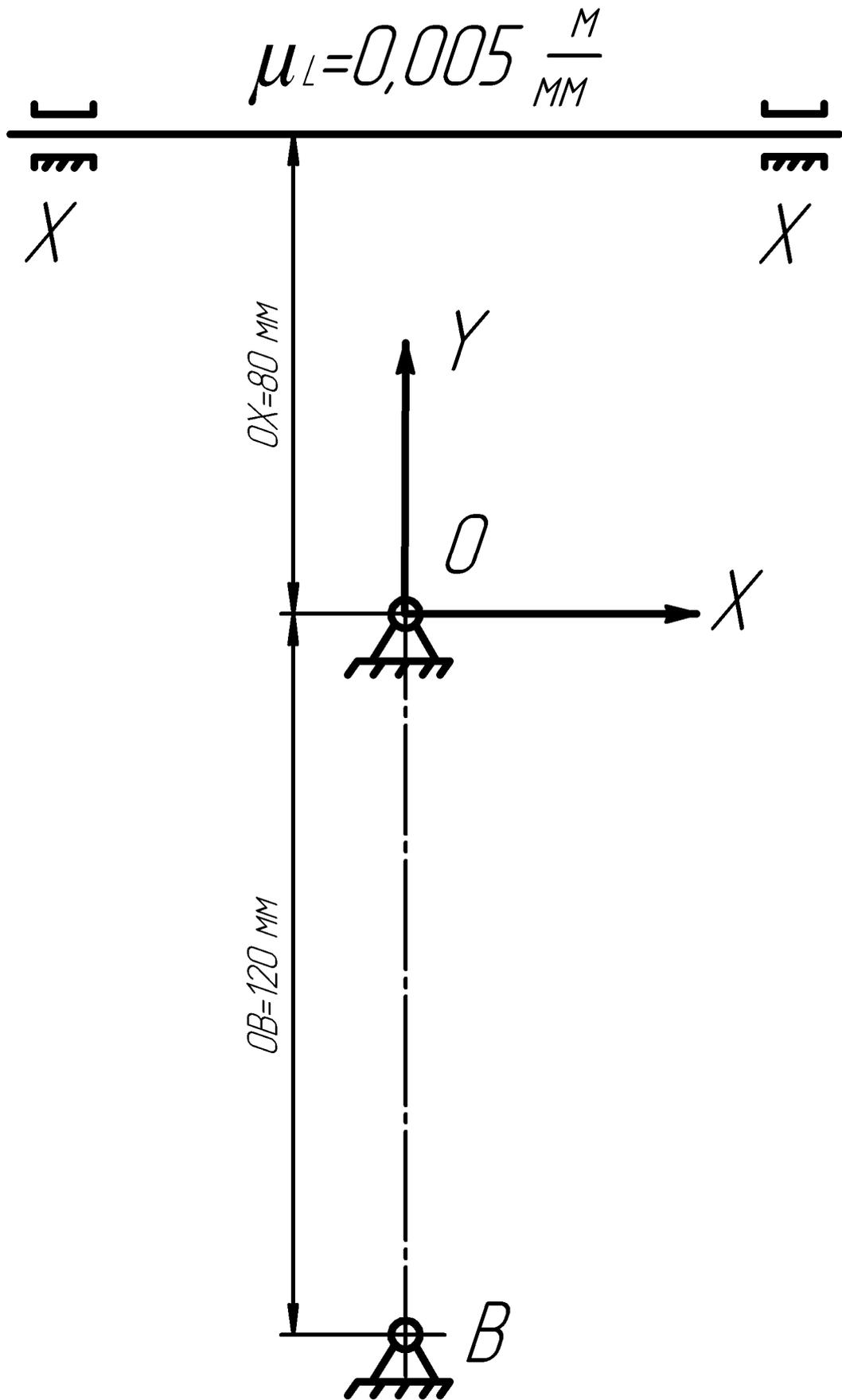


Рис. 1.5

Кривошип  $OA$  совершает полный оборот относительно оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа. Покажем траекторию движения точки  $A$  в виде окружности радиуса  $OA$  (рис. 1.6).

Определим крайние положения механизма. В данном случае они соответствуют крайним положениям кулисы  $BC$ , которые можно получить путем построения из точки  $B$  касательных к окружности  $OA$  (рис. 1.7). Перпендикуляры  $OA_0$  и  $OA_{01}$ , опущенные из точки  $O$  на эти касательные, определяют положения кривошипа, при которых звено 3 занимает крайние положения (см. рис. 1.7). На заданном расстоянии  $BC$  от точки  $B$  расположены точки  $C_0$  и  $C_{01}$  (см. рис. 1.7).

Достроим недостающие звенья 4 и 5 механизма и определим максимальный ход  $H_{\max}$  выходного звена 5, расположение его опор  $X-X$  (рис. 1.8). Рабочим ходом механизма является большая из дуг окружности траектории движения точки  $A$  кривошипа. При заданном направлении вращения  $\angle\alpha_p$  соответствует рабочему ходу,  $\angle\alpha_x$  – холостому ходу (рис. 1.9).

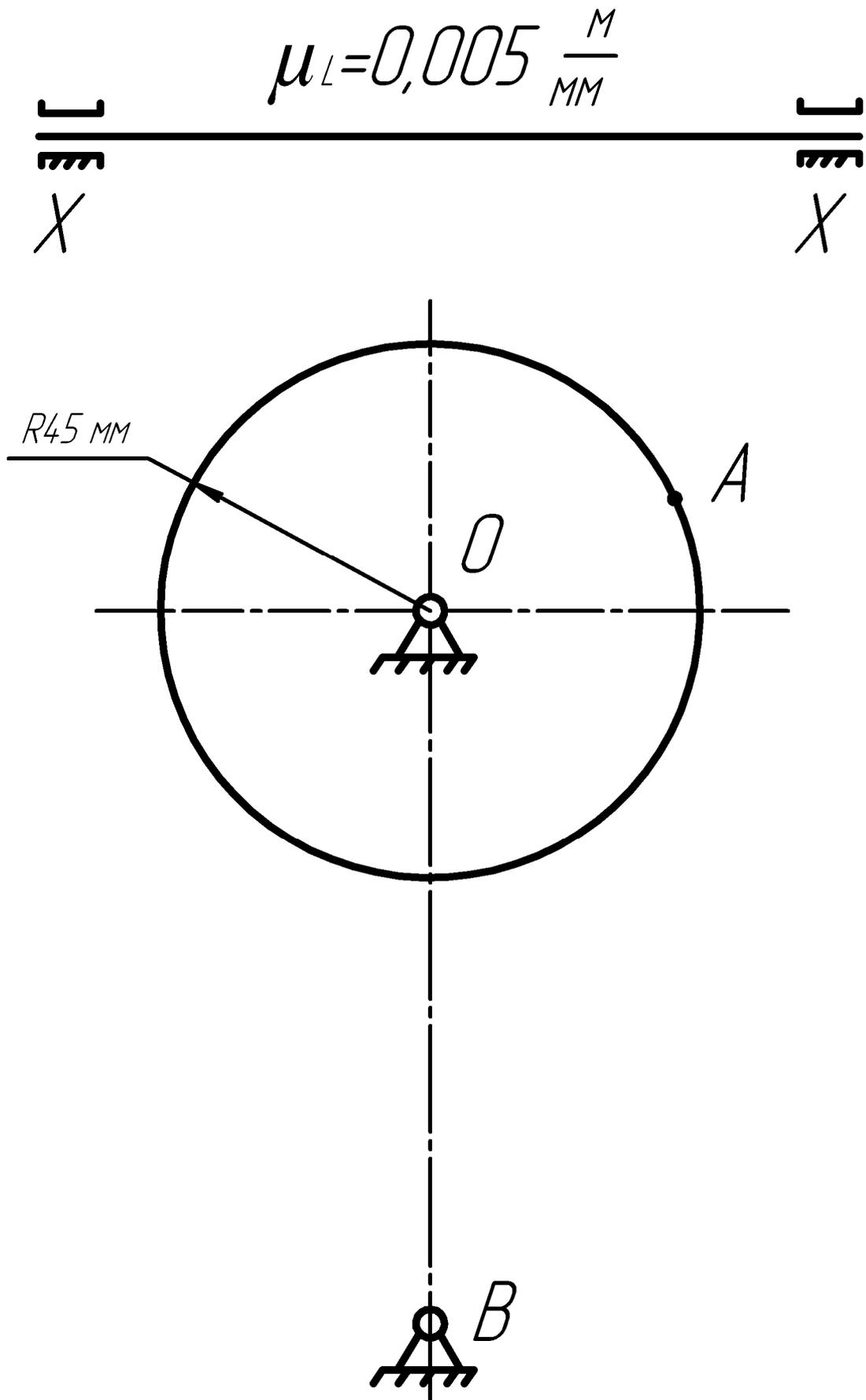
При равномерном вращении входного звена окружность, описанную одной из его точек, делят на равные части (8 или 12) (рис. 1.10).

Положение каждой точки деления обозначают определенным номером, который относится к плану всего механизма. За начало отсчета (0) принимают такое положение кривошипа, соответствующее одному из крайних положений выходного звена (звена, совершающего технологический процесс), с которого начинается рабочий ход механизма.

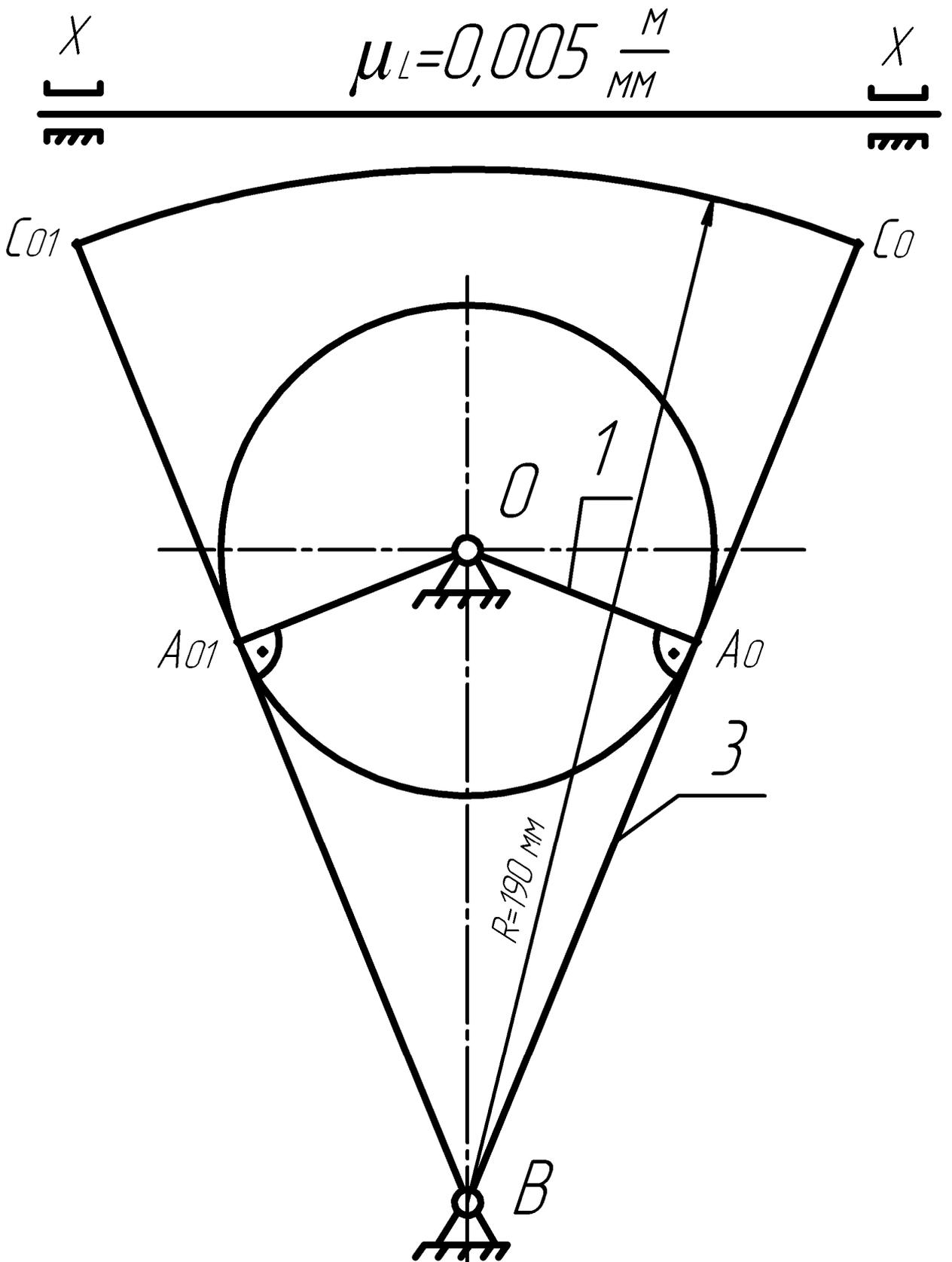
Примем за начало отсчета положение кривошипа, соответствующее положению  $OA_0$  (см. рис. 1.10).

При разбивке окружности на 8 частей положение  $OA_{01}$  может не войти в число расчетных точек. Эта точка исследуется отдельно: как девятое положение кривошипа. Это позволяет определить максимальное перемещение  $H_{\max}$  выходного звена 5 (см. рис. 1.8).

Положения остальных звеньев механизма (2...5) определяются методом засечек в порядке записи формулы строения механизма.



*Рис. 1.6*



Puc. 1.7



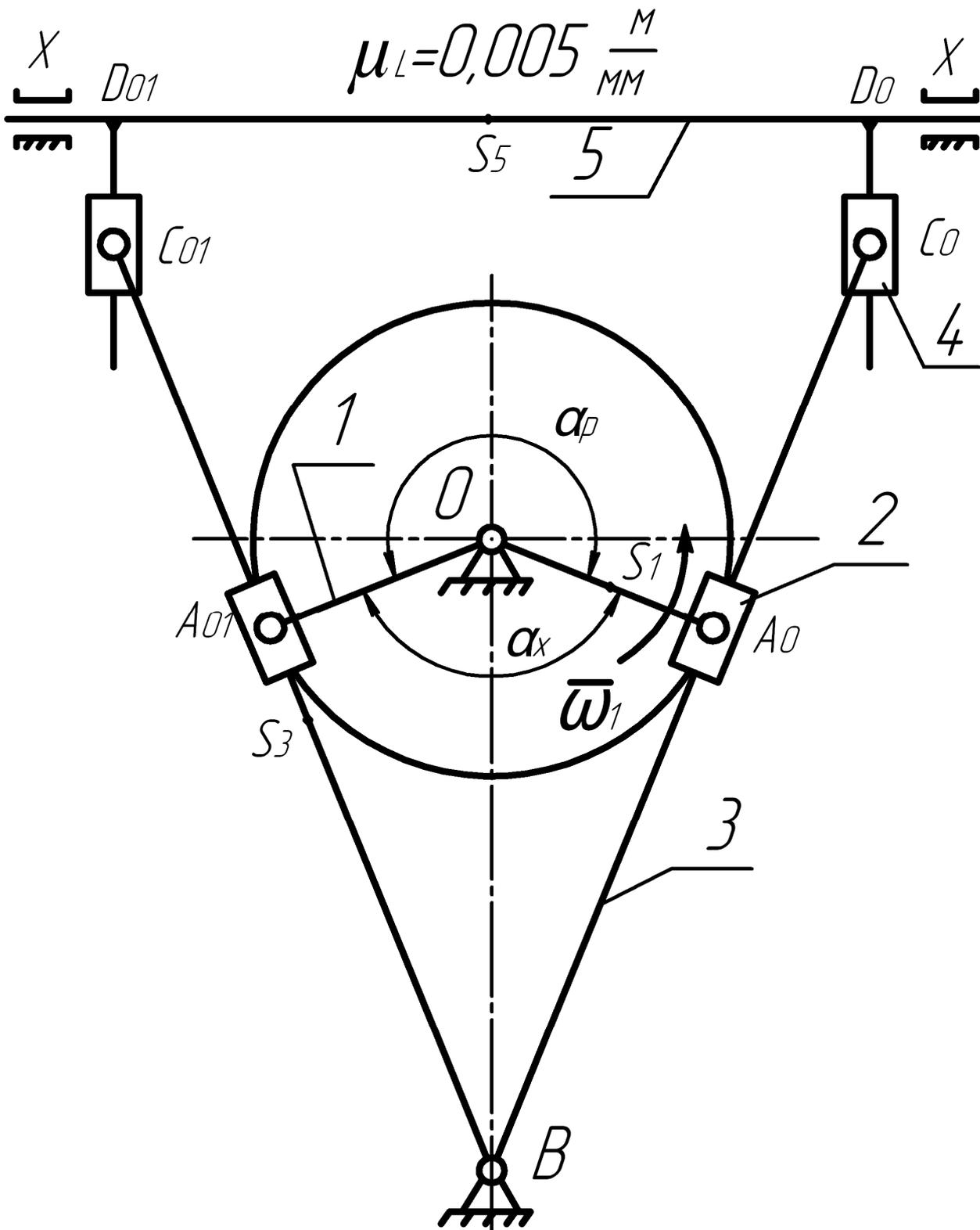


Рис. 1.9

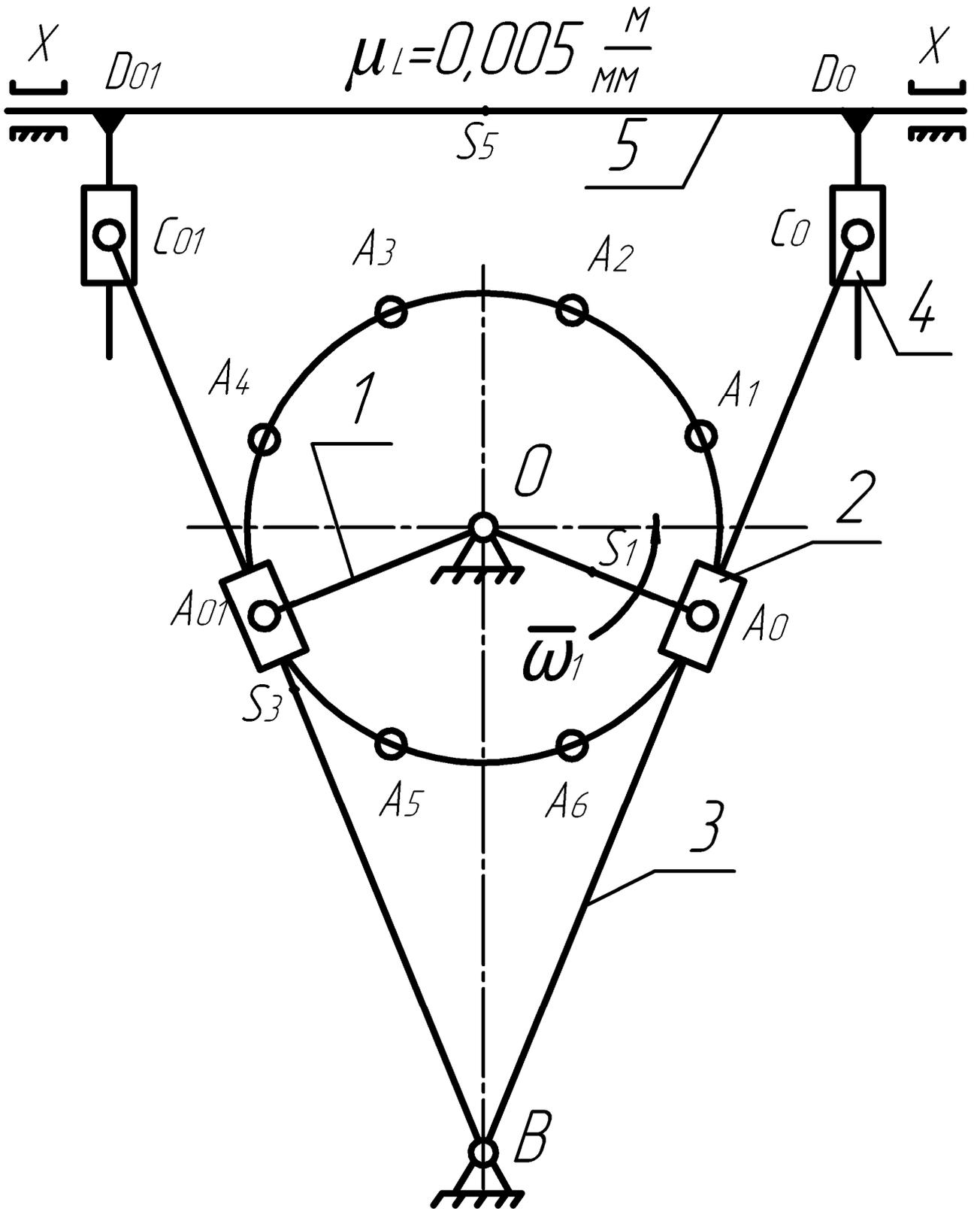


Рис. 1.10

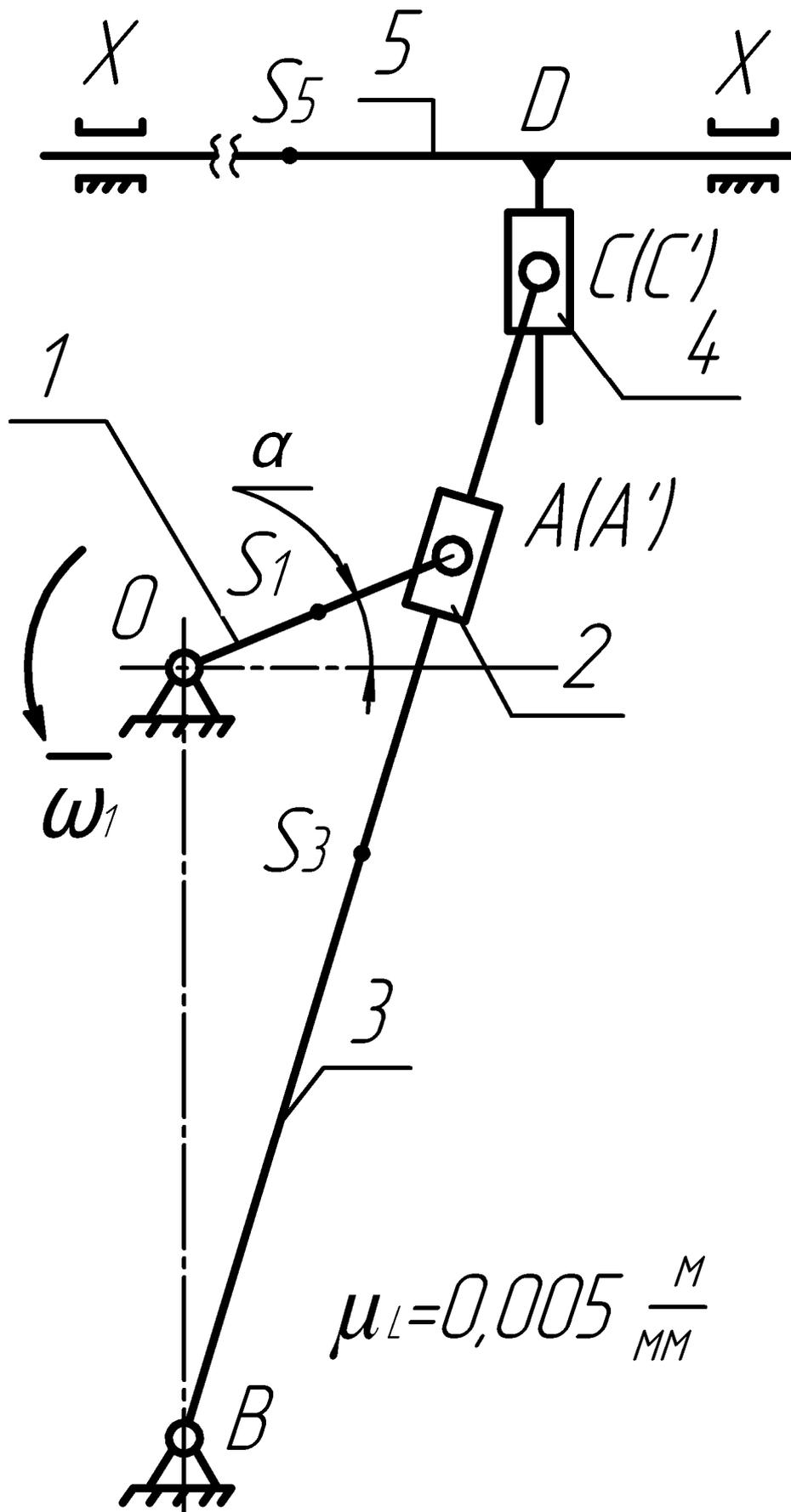


Рис. 1.11

После определения (методом планов положений) координат звеньев и, соответственно, точек звеньев механизма необходимо последовательно найти их скорости и ускорения.

Рассмотрим методику выполнения кинематического анализа методом планов. На рис. 1.11 построен план механизма в положении  $I$  для момента времени, когда кривошип  $OA$  образует с горизонталью угол  $\alpha = 30^\circ$ . Покажем также характерные точки  $S_1$ ,  $S_3$  и  $S_5$  (центры масс) звеньев механизма. Кинематический анализ проводится в отдельности для каждого положения входного звена механизма. Методика кинематического анализа для остальных положений механизма полностью повторяется.

#### 1.4. Построение плана скоростей

*План скоростей* – это векторный многоугольник, в котором каждый вектор изображает скорость какой-либо точки относительно другой точки. Обозначение каждой точки должно соответствовать наименованию точки на схеме механизма. Каждый вектор показывает направление скорости соответствующей точки и пропорционален ее величине. Векторы абсолютных (относительно стойки) скоростей точек механизма выходят из одной точки – *полюса плана скоростей*.

План скоростей строится на одном листе вместе с планом механизма. Каждому положению входного звена соответствует свой план скоростей. Последовательность его выполнения соответствует формуле строения механизма (1.6).

Согласно формуле (1.6), составление векторных уравнений начинается с механизма I класса (звенья  $0, 1$ ), затем рассматриваются группа Ассура II класса (звенья  $2, 3$ ) и группа Ассура II класса (звенья  $4, 5$ ).

Рассмотрим механизм I класса (звенья  $0, 1$ ). В него входят кинематические пары  $O$  и  $A$ . Поскольку точка  $O$  принадлежит опоре, ее скорость равна нулю. Найдем линейную скорость точки  $A$ .

### 1.4.1. Определение линейной скорости точки $A$

Поскольку скорость есть векторная величина, для ее построения необходимо знать модуль вектора, его направление и точку приложения.

Как было показано выше, точка  $A$  совершает вращательное движение относительно точки  $O$  по окружности радиуса  $OA$ . Также известна угловая скорость вращения кривошипа.

Таким образом, линейную скорость точки  $A$  можно найти по формуле

$$V_A = \omega_1 \cdot L_{OA}, \quad (1.16)$$

где  $V_A$  – линейная скорость т.  $A$ , принадлежащей кривошипу;

$\omega_1$  – угловая скорость кривошипа  $OA$ ,  $\text{с}^{-1}$ :

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30}. \quad (1.17)$$

Здесь  $n_1$  – скорость вращения кривошипа  $OA$ ,  $\text{мин}^{-1}$ .

Подстановкой выражения (1.17) в формулу (1.16) получим

$$V_A = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \cdot L_{OA}; \quad (1.18)$$

$$V_A = \frac{3,14 \cdot 48}{30} \cdot 0,225 = 1,13 \text{ м/с}. \quad (1.19)$$

Скорость точки, движущейся по окружности, направлена по касательной к траектории точки в данном положении, т. е. перпендикулярно радиусу, которым является звено  $OA$  (рис. 1.12).

На свободном месте чертежа выберем положение полюса плана скоростей – точку  $P_V$  (см. рис. 1.12). В полюсе будут находиться точки, скорости которых равны нулю.

На плане скоростей точки обозначаются прописными буквами.

Поместим в полюс точки  $o$  и проведем через нее прямую, перпендикулярную звену  $OA$  (см. рис. 1.12).

Чтобы отложить длину вектора скорости, нужно выбрать масштаб плана скоростей.

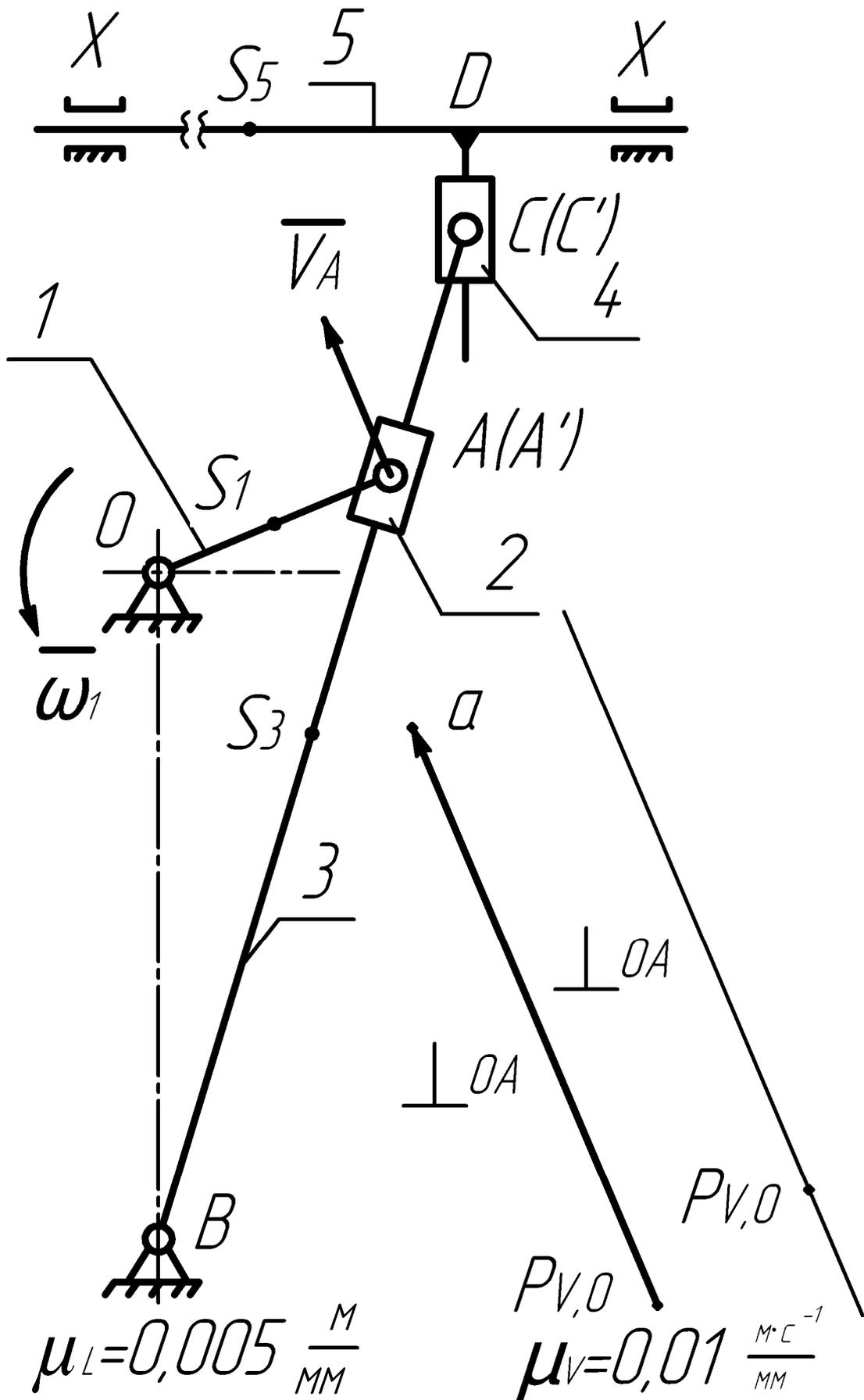


Рис. 1.12

### 1.4.2. Выбор масштабного коэффициента плана скоростей

*Масштабный коэффициент плана скоростей* – это отношение реальной величины скорости какой-либо точки к длине отрезка, которым она представлена на плане.

На данный момент известна только скорость точки  $A$ , вращающейся относительно опоры  $O$ . На плане скоростей ее будет изображать вектор. Начало этого вектора находится в точке  $P_V$  (которая совпадает с точкой  $o$ ), конец вектора – искомая точка  $a$ .

Таким образом, вектор скорости точки  $A$  на плане скоростей обозначается вектором  $\overline{P_V a}$ . Тогда запишем:

$$\mu_V = \frac{V_A}{P_V a}, \quad (1.20)$$

где  $P_V a$  – отрезок на плане скоростей, мм, представляющий вектор скорости точки  $A$ .

Исходя из размеров поля чертежа, выбираем длину вектора  $\overline{P_V a}$  таким образом, чтобы масштабный коэффициент  $\mu_V$  соответствовал значениям, установленным в ГОСТ 2.302-68:

$$\mu_V = \frac{1,13}{113} = 0,01 \frac{м/с}{мм}. \quad (1.21)$$

Зная длину вектора, из полюса  $P_V$  откладываем вектор  $\overline{P_V a}$  длиной 113 мм (см. рис. 1.12) таким образом, чтобы при движении точки  $A$  согласно этому вектору вращение звена происходило в направлении вектора угловой скорости  $\omega_1$  кривошипа (в данном случае против часовой стрелки). Линейные скорости кинематических пар механизма I класса определены.

На основании формулы строения механизма переходим к следующей группе Ассур II класса 3 вида (звенья 2, 3). В нее входят кинематические пары  $B$ ,  $A$  и  $A'$ . Скорость опоры  $B$  равна нулю, скорость точки  $A$  определена выше. Остается найти скорость точки  $A'$ .

### 1.4.3. Определение скорости точки $A'$

Точка  $A'$ , принадлежащая кулисе 3, является проекцией точки  $A$  на плоскость звена 3. Точка  $A'$  совершает сложное движение, которое можно разделить на две составляющие:

1) вращательное движение относительно точки  $B$  по дуге окружности переменного во времени радиуса  $BA'$ . Поскольку угловая скорость этого движения неизвестна, определить модуль линейной скорости искомой точки невозможно;

2) поступательное движение относительно точки  $A$  вдоль направляющей  $BC$  (чем вызвано изменение длины радиуса дуги  $BA'$  в процессе работы механизма). Модуль скорости этого движения также неизвестен.

Рассматривая движение точки  $A'$  по отношению к центру шарнира  $A$ , а затем по отношению к точке  $B$ , запишем два векторных уравнения, определяющих абсолютную скорость точки  $A'$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{A'} = \bar{V}_A + \bar{V}_{A'A}, \\ \bar{V}_{A'} = \bar{V}_B + \bar{V}_{A'B}, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{A'} = \bar{V}_B + \bar{V}_{A'B}, \end{array} \right. \quad (1.23)$$

где  $\bar{V}_B$  – переносная скорость т.  $A'$ , равная нулю, т. к. опора  $B$  неподвижна;

$\bar{V}_A$  – переносная скорость т.  $A'$  звена 3;

$\bar{V}_{A'A}$  – относительная скорость т.  $A'$  в поступательном движении кулисы по отношению к т.  $A$  камня, направленная параллельно звену 3;

$\bar{V}_{A'B}$  – относительная скорость т.  $A'$  во вращательном движении звена 3 вокруг т.  $B$ , направленная перпендикулярно звену 3 ( $BC$ ).

Система уравнений (1.22), (1.23) содержит четыре неизвестных составляющих векторов: модуль и направление вектора скорости  $\bar{V}_{A'}$ , модуль вектора скорости  $\bar{V}_{A'A}$  и модуль вектора скорости  $\bar{V}_{A'B}$ . Решаем уравнение (1.22) графически (рис. 1.13). Из конца вектора скорости  $\bar{V}_A$  (точка  $a$  плана скоростей) в направлении вектора скорости  $\bar{V}_{A'A}$  проводим прямую, т. е. параллельно кулисе  $BC$  (поскольку звено 2 движется прямолинейно вдоль направляющей).

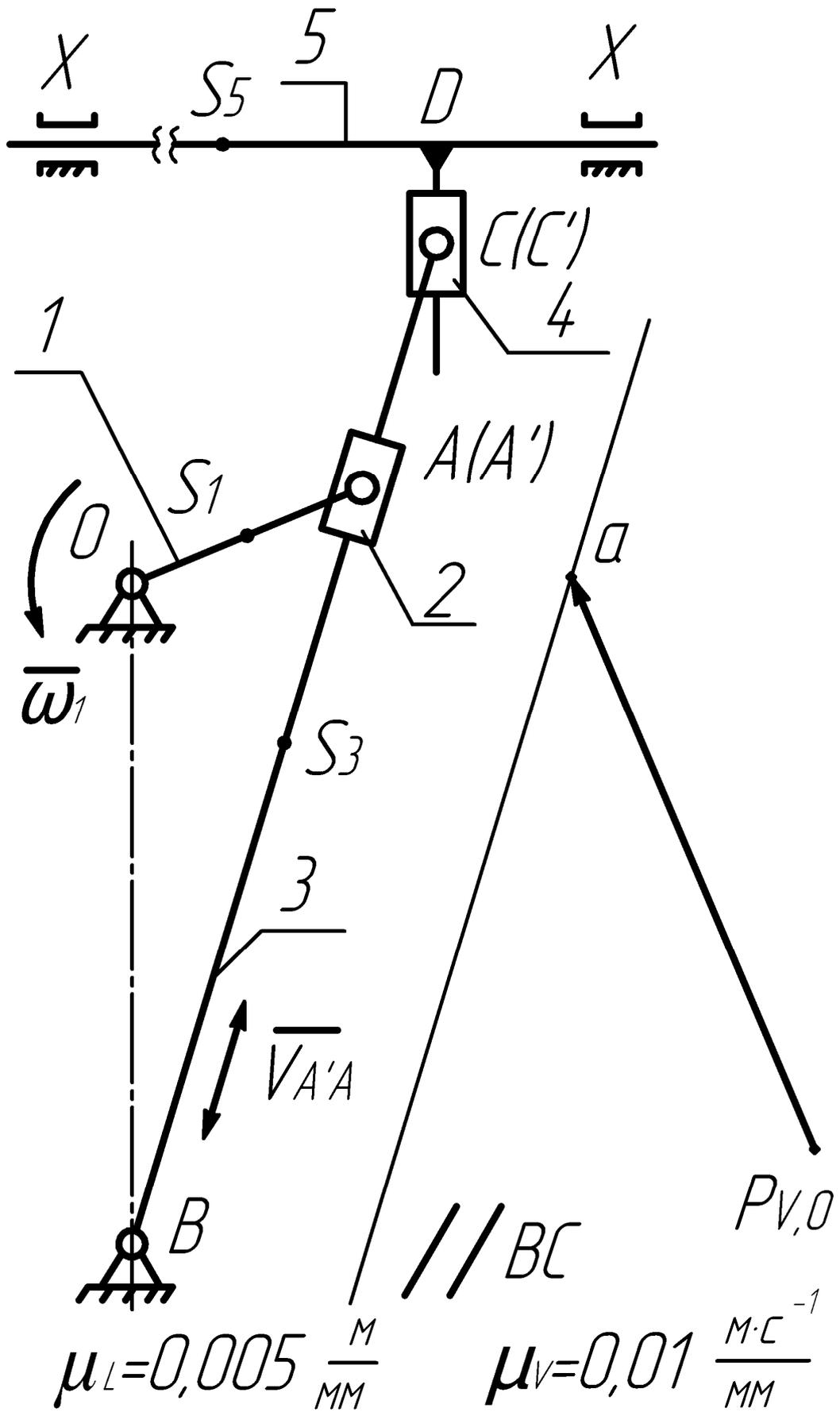


Рис. 1.13

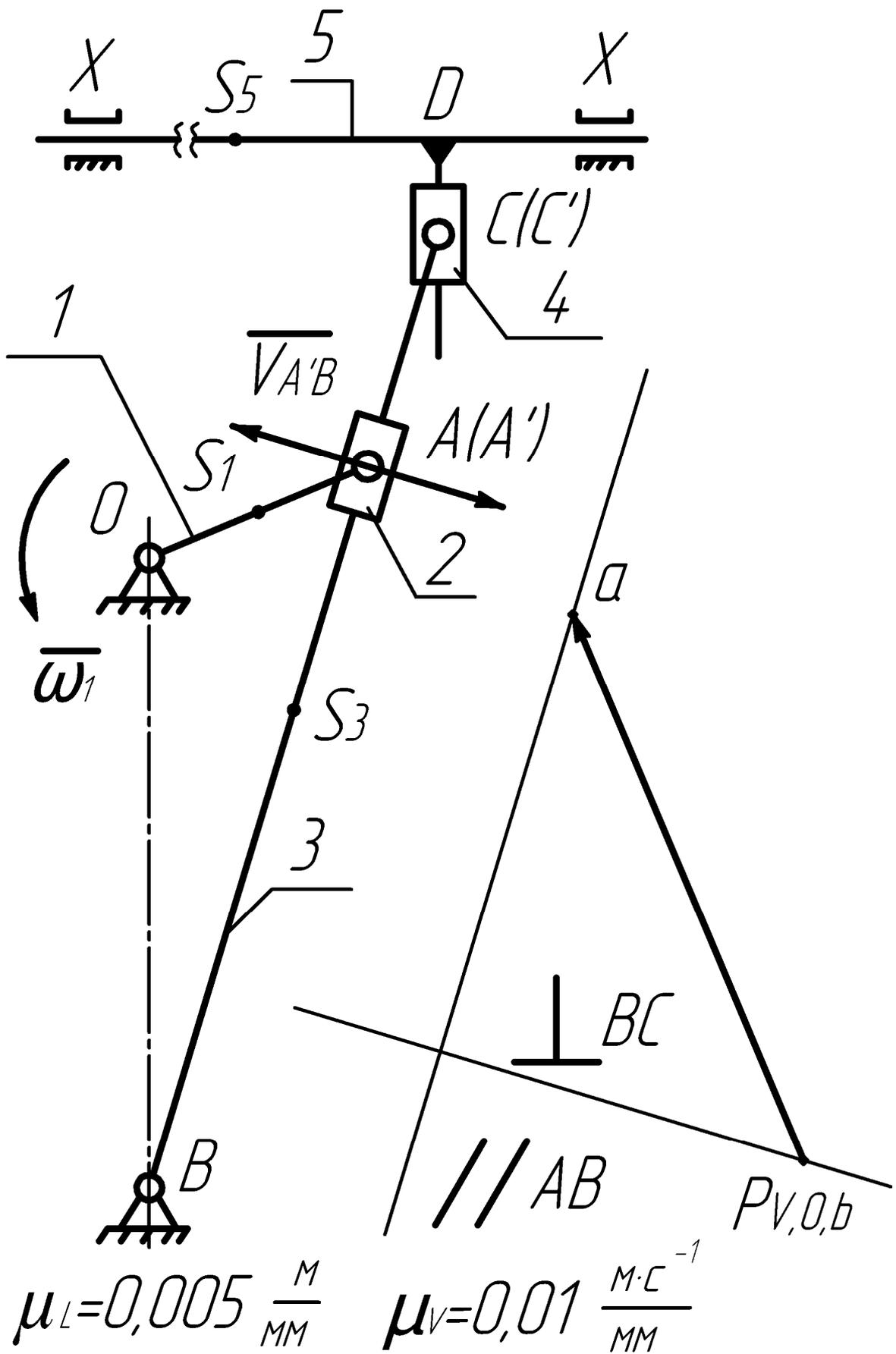


Рис. 1.14

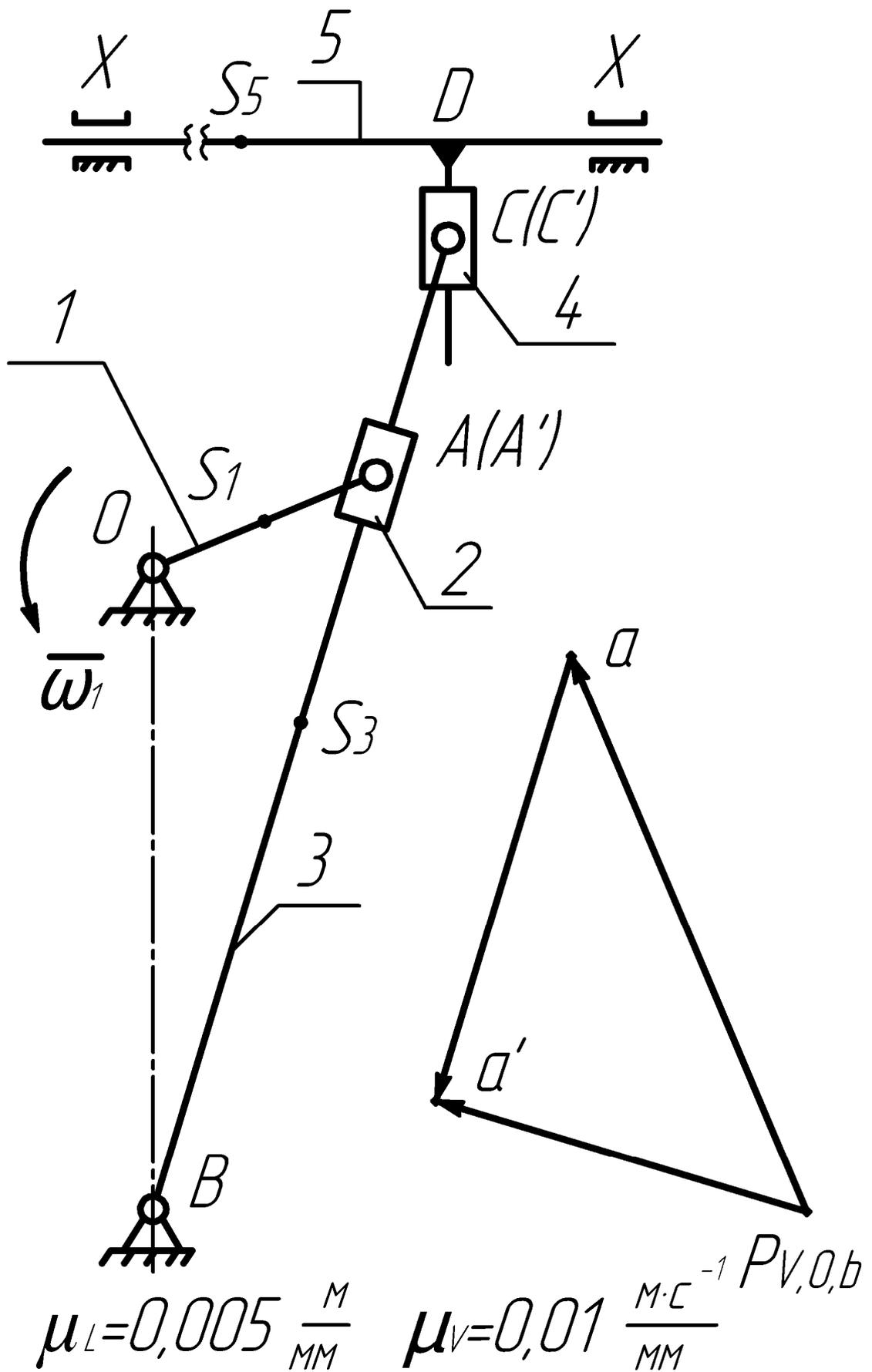


Рис. 1.15

Решаем уравнение (1.23) графически (рис. 1.14). Построим вектор  $\overline{V}_B$ . Точка  $B$  неподвижна: ее скорость равна нулю.

Нулевой вектор – это точка, значит, она располагается в полюсе (поставим ее там). Из конца вектора  $\overline{V}_B$  (точка  $P_V$ ) проводим линию вектора скорости  $\overline{V}_{A'B}$ , которая направлена перпендикулярно звену  $BC$  (см. рис. 1.14).

Объединяя решения уравнений (1.22) и (1.23), получим, что концы векторов  $\overline{V}_{A'B}$  и  $\overline{V}_{A'A}$  будут сходиться в точке  $a'$ . Соединим ее векторами с точками  $a$  и  $P_V$  (рис. 1.15).

#### 1.4.4. Определение скоростей характерных точек $S_1$ , $S_3$ и $C$

Если известны скорости двух точек подвижного звена, то скорости других точек этого звена можно определить по теореме подобия, из которой следует, что одноименные фигуры на плане скоростей и на плане механизма подобны. Определяем положение точек  $S_1$ ,  $S_3$  и  $C$ , используя соотношения:

$$\frac{P_V a}{P_V S_1} = \frac{OA}{OS_1} = \frac{l_{OA}}{l_{OS_1}}; \quad (1.24)$$

$$\frac{P_V a'}{P_V c} = \frac{AB}{BC} = \frac{l_{AB}}{l_{BC}}; \quad (1.25)$$

$$\frac{P_V a'}{P_V s_3} = \frac{AB}{BS_3} = \frac{l_{AB}}{l_{BS_3}}; \quad (1.26)$$

$$P_V s_1 = \frac{(P_V a)OS_1}{OA}; \quad (1.27) \quad P_V s_3 = \frac{72 \cdot 95}{143,5} = 47,7 \text{ мм}; \quad (1.30)$$

$$P_V s_1 = \frac{113 \cdot 22,5}{45} = 56,5 \text{ мм}; \quad (1.28) \quad P_V c = \frac{(P_V a')BC}{AB}; \quad (1.31)$$

$$P_V s_3 = \frac{(P_V a')BS_3}{AB}; \quad (1.29) \quad P_V c = \frac{72 \cdot 189,9}{143,5} = 95,2 \text{ мм}. \quad (1.32)$$

Откладываем на плане скоростей вектора  $\overline{P_V s_1}$  на линии вектора  $\overline{P_V a}$ ,  $\overline{P_V s_3}$  и  $\overline{P_V c}$  на линии вектора  $\overline{P_V a'}$  (рис. 1.16).

Переходим к рассмотрению следующей группы Ассур II класса (звенья 4, 5).

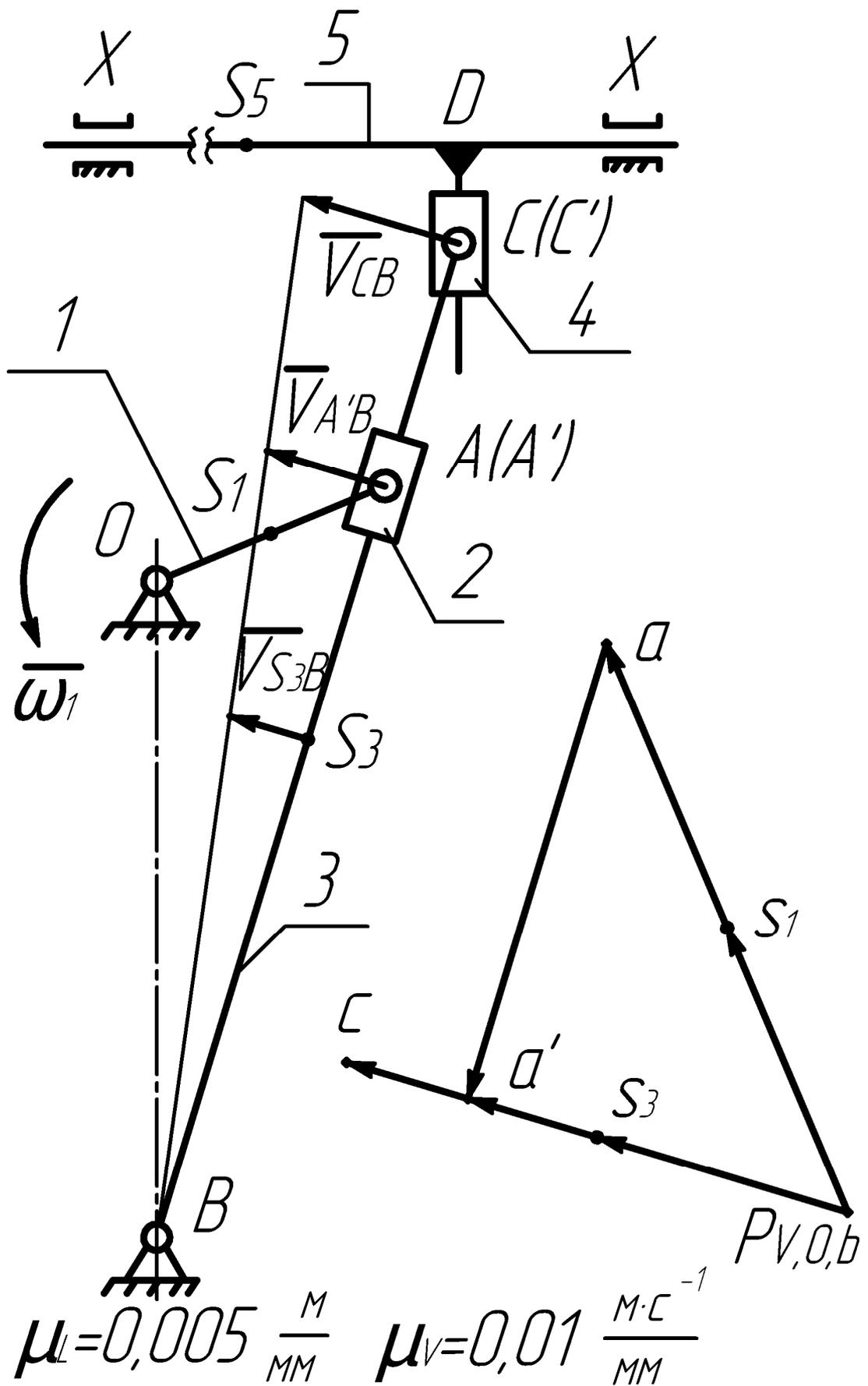


Рис. 1.16

### 1.4.5. Определение скорости точки $C'$

В группу 4–5 входят точки  $C$ ,  $C'$  и  $X$ . Скорость точки  $C$  определена выше. Опора  $X$  неподвижна.

Камень 4 движется поступательно относительно звена 5, которое в свою очередь движется поступательно относительно неподвижной направляющей  $X-X$ , поэтому достаточно знать скорость какой-либо одной точки звена 5.

Определим скорость внутренней кинематической пары – точка  $C'$ .

Точка  $C'$  является проекцией точки  $C$  на плоскость движения ползуна 5. Точка  $C'$  совершает сложное движение: переносное – совместно со звеном 4; относительное – поступательное движение по отношению к звену 5 вдоль опоры  $X-X$ .

Поэтому векторные уравнения по определению абсолютной скорости точки  $C'$  получают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{C'} = \bar{V}_C + \bar{V}_{C'C}, \\ \bar{V}_{C'} = \bar{V}_X + \bar{V}_{C'X}, \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{C'} = \bar{V}_C + \bar{V}_{C'C}, \\ \bar{V}_{C'} = \bar{V}_X + \bar{V}_{C'X}, \end{array} \right. \quad (1.34)$$

где  $\bar{V}_C$  – переносная скорость т.  $C'$  при движении совместно со звеном 3;

$\bar{V}_{C'C}$  – относительная скорость т.  $C'$  по отношению к т.  $C$ ;

$\bar{V}_X$  – переносная скорость т.  $C'$  при движении совместно с неподвижной направляющей  $X-X$ ;

$\bar{V}_{C'X}$  – относительная скорость т.  $C'$  в поступательном движении вдоль направляющей  $X-X$ .

Система уравнений (1.33), (1.34) содержит четыре неизвестных составляющих векторов: модуль и направление вектора скорости  $\bar{V}_{C'}$ , модуль вектора скорости  $\bar{V}_{C'C}$  и модуль вектора скорости  $\bar{V}_{C'X}$ .

Решаем уравнение (1.33) графически.

Скорость точки  $C$  определена ранее.

Из конца вектора  $\overline{Pc}$  (точка  $c$ ) проводим линию действия вектора  $\bar{V}_{C'C}$ , параллельную кулисе  $CD$  (рис. 1.17).

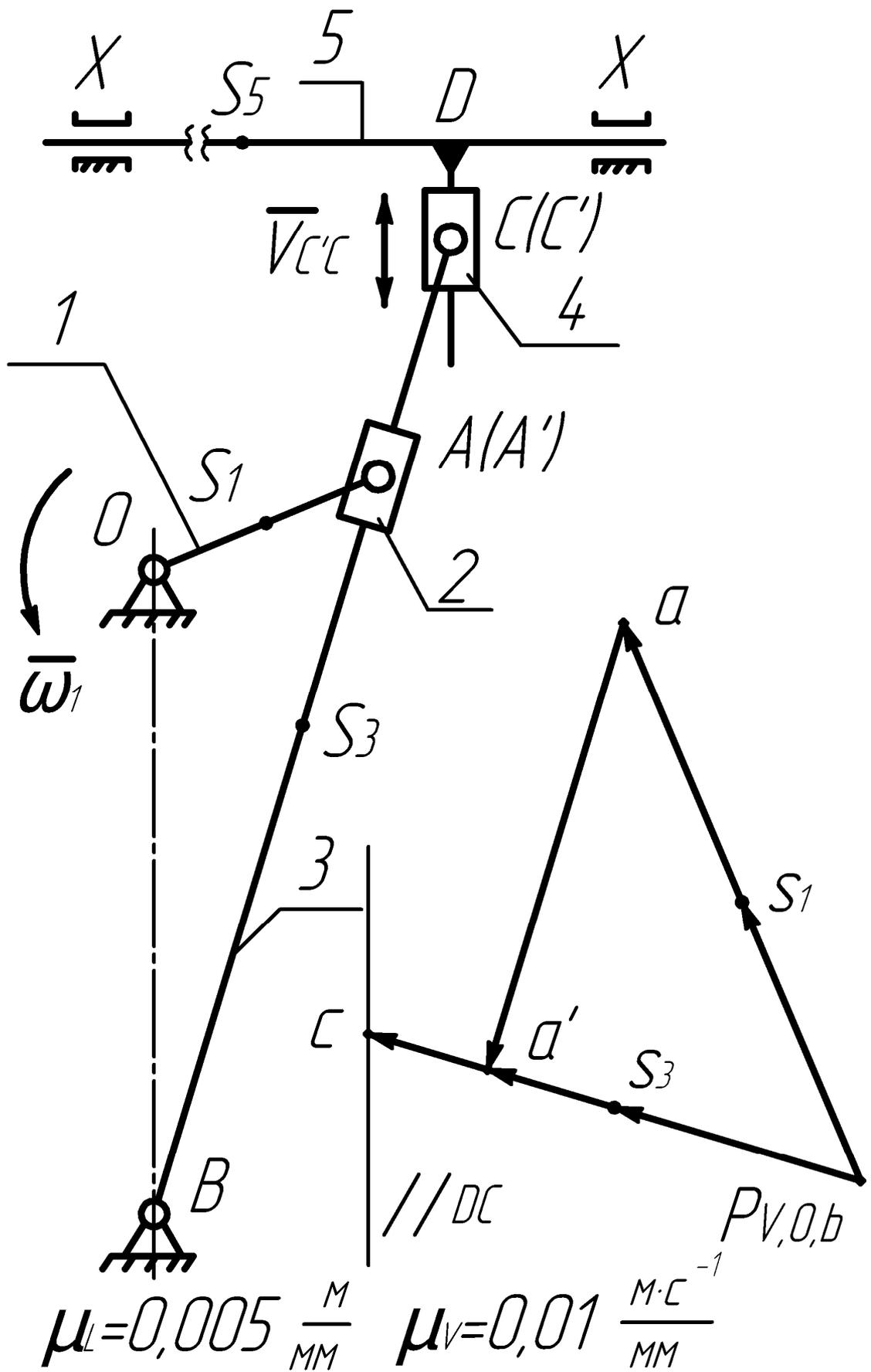


Рис. 1.17



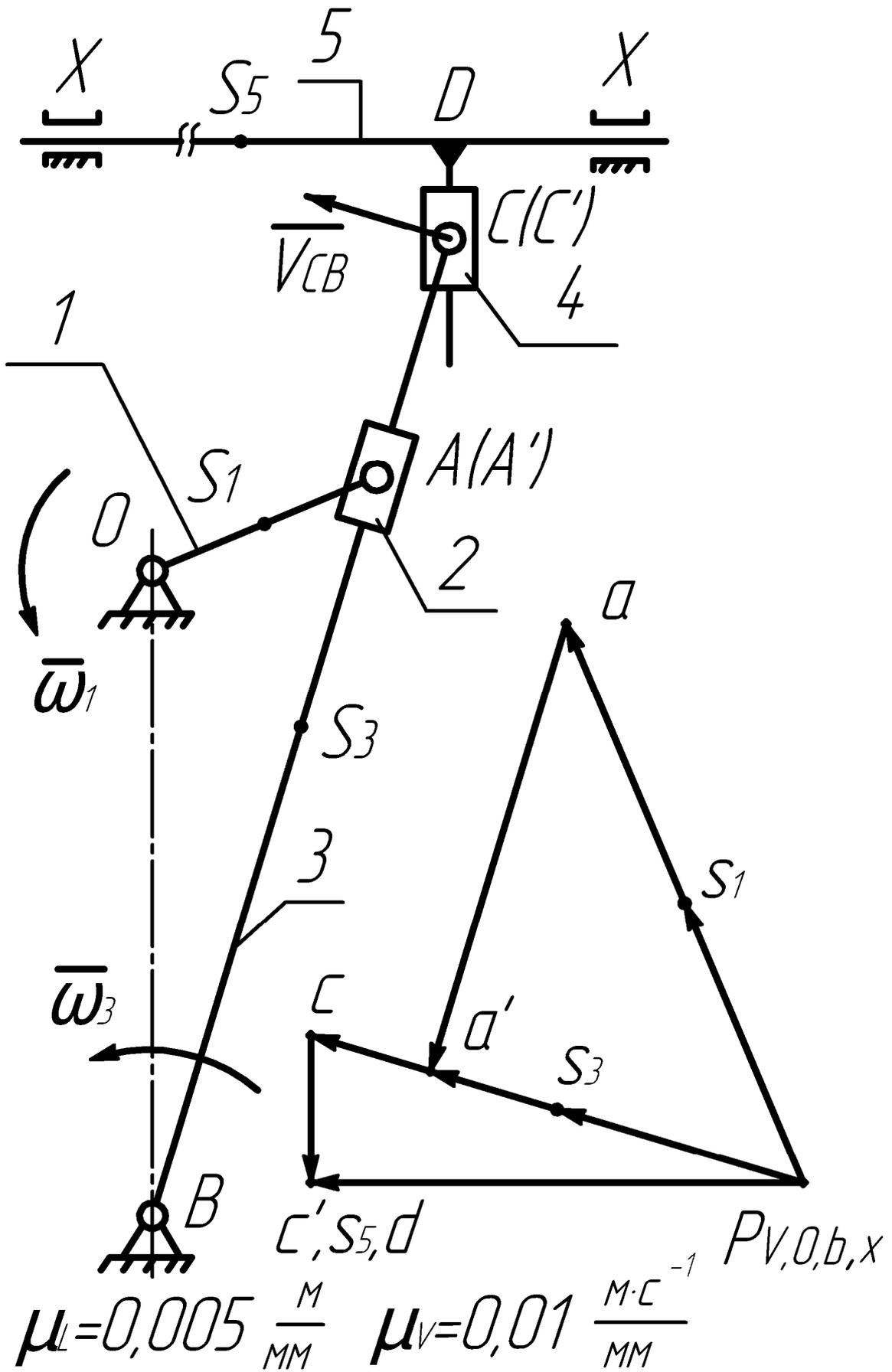


Рис. 1.19

Решаем уравнение (1.34) графически. Скорость точки  $X$  равна нулю. Поместим точку  $x$  в полюсе плана скоростей (рис. 1.18). Из полюса  $P_V$  (где находится скорость точки  $X$ ) проводим прямую линию действия вектора  $\overline{V_{C'X}}$ , параллельную направляющей  $X-X$  (см. рис. 1.18).

Совместное решение уравнений (1.33) и (1.34) дает положение точки  $c'$ , которая определяет концы векторов  $\overline{cc'}$  и  $\overline{P_Vc'}$  (рис. 1.19). Скорости точек  $C'$ ,  $S_5$  и  $D$  равны (см. рис. 1.19).

Рассмотрена последняя группа Ассура. Для проверки убедимся, что все точки механизма имеются на плане скоростей. Таким образом, план скоростей завершен. При этом искомые линейные скорости точек и угловые скорости звеньев механизма еще не найдены.

#### **1.4.6. Определение истинных значений линейных скоростей характерных точек звеньев механизма**

Имея план скоростей, определим скорости точек по величине.

Через масштабный коэффициент плана скоростей находим истинные значения скоростей, для чего умножаем его на длину отрезка, мм, которым обозначена искомая скорость:

$$V_{A'} = V_{A'B} = \overline{P_V a'} \cdot \mu_V; \quad (1.35)$$

$$V_{A'} = V_{A'B} = 72 \cdot 0,01 = 0,72 \text{ м/с} \quad (1.36)$$

$$V_{A'A} = \overline{aa'} \cdot \mu_V; \quad (1.37)$$

$$V_{A'A} = 87,1 \cdot 0,01 = 0,87 \text{ м/с}; \quad (1.38)$$

$$V_{S_3} = \overline{P_V s_3} \cdot \mu_V; \quad (1.39)$$

$$V_{S_3} = 47,7 \cdot 0,01 = 0,48 \text{ м/с}; \quad (1.40)$$

$$V_{C'C} = \overline{cc'} \cdot \mu_V; \quad (1.41)$$

$$V_{C'C} = 27,4 \cdot 0,01 = 0,27 \text{ м/с}; \quad (1.42)$$

$$V_{C'} = V_{S_5} = V_D = \overline{P_V c'} \cdot \mu_V; \quad (1.43)$$

$$V_{C'} = V_{S_5} = V_D = 91 \cdot 0,01 = 0,91 \text{ м/с}; \quad (1.44)$$

$$V_C = \overline{P_{Vc}} \cdot \mu_V; \quad (1.45)$$

$$V_C = 95,2 \cdot 0,01 = 0,95 \text{ м/с}. \quad (1.46)$$

#### 1.4.7. Определение значений угловых скоростей звеньев

Угловая скорость звена 1 известна. Угловая скорость звена 2 равна угловой скорости звена 3. Определим угловую скорость кулисы 3. Точка  $C$  совершает качательное движение относительно оси  $B$ .

Соотношение между угловой и линейной скоростями точки, совершающей вращательное движение, показано в формуле (1.5). При движении звена 3 точка  $C$  перемещается по дуге окружности ( $R = BC$ ) относительно центра кривизны (точки  $B$ ).

Находим угловую скорость звена 3:

$$\omega_3 = \frac{V_C}{l_{BC}}; \quad (1.47)$$

$$\omega_3 = \frac{\overline{P_{Vc}} \cdot \mu_V}{l_{BC}}; \quad (1.48)$$

$$\omega_3 = \frac{0,95}{0,95} = 1,0 \text{ с}^{-1}. \quad (1.49)$$

Направление угловой скорости  $\overline{\omega_3}$  совпадает с направлением вращения точки  $C$ , которое определяется вектором  $\overline{P_{Vc}}$ . Для установления этого направления перенесем вектор  $\overline{P_{Vc}}$  в точку  $C$  кулисы 3 на плане механизма (см. рис. 1.19).

Рассмотрим вращение точки  $C$  вокруг точки  $B$  под действием вектора  $\overline{P_{Vc}}$ . Вращение будет направлено против часовой стрелки. Такое же направление имеет вектор  $\overline{\omega_3}$ .

Угловые скорости звеньев 4 и 5 равны нулю, поскольку они совершают поступательные движения относительно стойки.

## 1.5. Построение плана ускорений

План ускорений строится на одном листе вместе с планом механизма в той же последовательности, что и план скоростей.

### 1.5.1. Ускорение точки $A$

Рассмотрим механизм I класса (звенья  $0, I$ ).

Точка  $A$  совершает вращательное движение относительно точки  $O$  по окружности радиусом  $R = OA$ .

Величина и направление вектора ускорения точки  $A$  неизвестны. Однако его можно представить в виде

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau, \quad (1.50)$$

где  $\bar{a}_A^n$  – нормальная составляющая ускорения т.  $A$  относительно т.  $O$ ;

$\bar{a}_A^\tau$  – касательная (тангенциальная) составляющая ускорения т.  $A$  относительно т.  $O$ .

Вектор  $\bar{a}_A^n$  направлен от точки  $A$  к центру кривизны траектории (точка  $O$ ).

Направление вектора  $\bar{a}_A^\tau$  соответствует направлению углового ускорения звена и проходит по касательной к траектории движения – окружности  $OA$  (перпендикулярно звену  $OA$ ).

Для этих векторов известны выражения:

$$\bar{a}_A^n = \omega_1^2 R; \quad (1.51)$$

$$\bar{a}_A^n = \frac{V_{AO}^2}{R}; \quad (1.52)$$

$$\bar{a}_A^\tau = \varepsilon_1 R, \quad (1.53)$$

где  $\varepsilon_1$  – угловое ускорения звена  $I$  ( $OA$ );

$R$  – радиус кривизны траектории движения т.  $A$ ,  $R = L_{OA}$ .

В случае движения с постоянной угловой скоростью имеем  $\omega_1 = const$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0. \quad (1.54)$$

Подстановкой (1.54) в (1.53) получим

$$a_A^\tau = 0. \quad (1.55)$$

Подстановкой (1.55) в (1.50) получим

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n. \quad (1.56)$$

Подстановкой (1.51) в (1.56) получим

$$a_A = \omega_1^2 \cdot L_{OA}, \quad (1.57)$$

а с учетом (1.17)

$$a_A = \left( \frac{\pi \cdot n_1}{30} \right)^2 \cdot L_{OA}; \quad (1.58)$$

$$a_A = \left( \frac{3,14 \cdot 48}{30} \right)^2 \cdot 0,025 = 5,7 \text{ м/с}^2. \quad (1.59)$$

На свободном месте чертежа выбираем положение полюса плана ускорений (точка  $P_a$ , там же расположено ускорение неподвижной точки  $O$ ) и проведем через него направление нормального ускорения (прямую, параллельную звену  $OA$ ) для данного положения механизма (рис. 1.20, а).

Для построения вектора  $\bar{a}_A$  требуется выбрать масштабный коэффициент плана ускорений.

### 1.5.2. Масштабный коэффициент плана ускорений

Выбираем масштабный коэффициент плана ускорений:

$$\mu_a = \frac{a_A}{P_a a}; \quad (1.60)$$

$$\mu_a = \frac{5,7}{114} = 0,05 \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}. \quad (1.61)$$

Отложим на имеющейся прямой отрезок  $P_a a$  и обозначим его вектором в направлении от точки  $A$  к центру окружности (рис. 1.20, б).

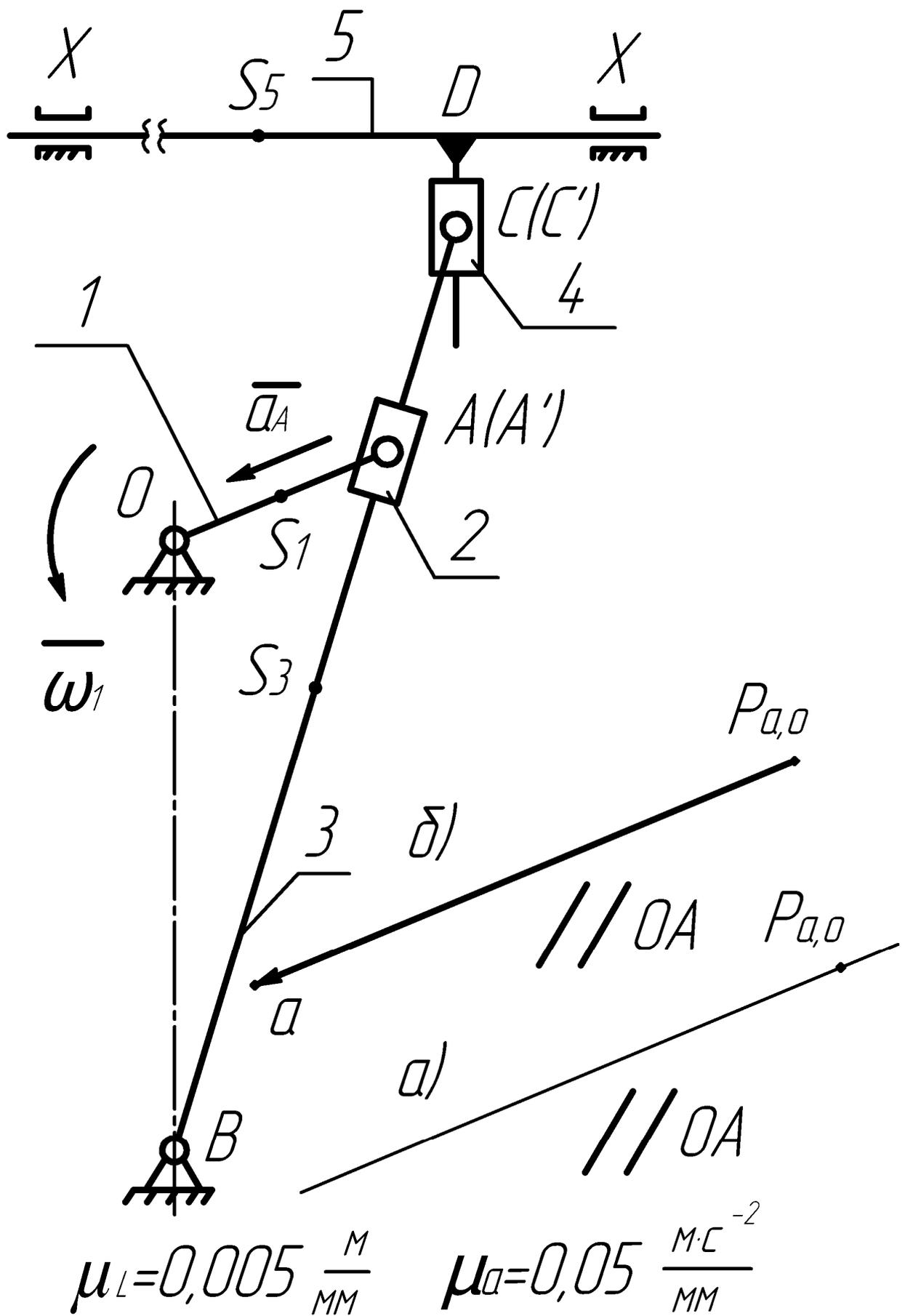


Рис. 1.20

### 1.5.3. Ускорение точки $A'$

Рассмотрим группу Ассура II класса (звенья 2, 3). В нее входят точки  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  и  $C$ .

Ускорения внешних кинематических пар  $A$ ,  $B$  известны. Найдем ускорение внутренней кинематической пары  $A'$ .

Движение точки  $A'$  описано выше.

Для определения ускорения этой точки составим в векторной форме систему из двух уравнений ее движения относительно внешних кинематических пар группы 2–3 (по аналогии с планом скоростей):

$$\begin{cases} \bar{a}_{A'} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A'B}, & (1.62) \\ \bar{a}_{A'} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A'A}, & (1.63) \end{cases}$$

где  $\bar{a}_{A'}$  – абсолютное ускорение т.  $A'$ ;

$\bar{a}_B$  – абсолютное ускорение т.  $B$ ,  $\bar{a}_B = 0$ ;

$\bar{a}_{A'B}$  – ускорение т.  $A'$  относительно т.  $B$ ;

$\bar{a}_{A'A}$  – ускорение т.  $A'$  относительно т.  $A$ .

Система уравнений (1.62), (1.63) содержит пять неизвестных: модули и направления векторов  $\bar{a}_{A'}$ ,  $\bar{a}_{A'B}$  и модуль вектора  $\bar{a}_{A'A}$ . Поскольку число неизвестных больше четырех, то систему решить невозможно.

Представим вектор  $\bar{a}_{A'B}$  в соответствии с (1.50):

$$\bar{a}_{A'} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A'B}^n + \bar{a}_{A'B}^\tau. \quad (1.64)$$

В уравнении (1.64) ускорение  $\bar{a}_B = 0$ , т. к. опора  $B$  неподвижна.

Вектор нормального ускорения  $\bar{a}_{A'B}^n$  направлен от точки  $A'$  параллельно звену  $BC$  к центру траектории возвратно-вращательного движения (точка  $B$ ):

$$a_{A'B}^n = \frac{V_{A'B}^2}{(BA')\mu_L}; \quad (1.65)$$

$$a_{A'B}^n = \frac{(0,72)^2}{143,5 \cdot 0,005} = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (1.66)$$

Вектор тангенциального ускорения направлен перпендикулярно звену  $BC$ , а его модуль ( $a_{A'B}^\tau = \varepsilon_3 \cdot L_{BA'}$ ) невозможно определить в связи с тем, что неизвестна величина углового ускорения  $\bar{\varepsilon}_3$  3-го звена.

Имеем одно уравнение и три неизвестных параметра (величина и направление вектора  $\bar{a}_{A'}$  и величина вектора  $\bar{a}_{A'B}^\tau$ ).

Такое уравнение не имеет решения, так как содержит более двух неизвестных. Отсюда следует, что необходимо составить еще одно уравнение движения точки  $A'$ .

Одновременно точка  $A'$  совершает сложное движение относительно точки  $O$ . Это движение состоит из относительного (поступательного вдоль направляющей  $BC$ ) и переносного (возвратно-вращательного, вместе с камнем 2 (точка  $A$ ), с угловой скоростью  $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3$ ).

Поэтому в уравнение абсолютного ускорения должно войти добавочное кориолисово ускорение  $\bar{a}_{A'A}^k$ :

$$\bar{a}_{A'} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A'A}^k + \bar{a}_{A'A}, \quad (1.67)$$

где  $\bar{a}_{A'A}^k$  – кориолисово ускорение.

Из курса теоретической механики известно:

$$\bar{a}^k = 2\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{отн}, \quad (1.68)$$

где  $\bar{\omega}_{пер}$  – угловая скорость переносного движения;

$\bar{V}_{отн}$  – линейная скорость относительного движения.

Раскрывая векторное произведение векторов в уравнении (1.68), получим, что величина кориолисова ускорения определяется по формуле

$$\bar{a}_{A'A}^k = 2\bar{\omega}_3 \cdot \bar{V}_{A'A} \cdot \sin(90^0); \quad (1.69)$$

$$\bar{a}_{A'A}^k = 2\bar{\omega}_3 \cdot \bar{V}_{A'A}; \quad (1.70)$$

$$\bar{a}_{A'A}^k = 2 \cdot 1,0 \cdot 0,87 = 1,742 \text{ м/с}^2. \quad (1.71)$$

Направление вектора кориолисова ускорения  $\bar{a}_{A'A}^k$  определяется поворотом на  $90^\circ$  вектора относительной линейной скорости  $\bar{V}_{A'A}$  в сторону направления переносной угловой скорости  $\bar{\omega}_2$  звена 2.

Вектор ускорения  $\bar{a}_{A'A}$  направлен параллельно прямолинейной кулисе  $BC$ , а его модуль невозможно определить. В уравнении (1.67) имеем три неизвестных параметра (величина и направление вектора  $\bar{a}_{A'}$  и величина вектора  $\bar{a}_{A'A}$ ). Такое уравнение не имеет решения, так как содержит более двух неизвестных. Поэтому объединяем уравнения (1.64) и (1.67) в систему, в которой будет четыре неизвестных:

$$\begin{cases} \bar{a}_{A'} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A'B}^n + \bar{a}_{A'B}^\tau, & (1.72) \\ \bar{a}_{A'} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A'A}^k + \bar{a}_{A'A}. & (1.73) \end{cases}$$

Система решается графически. Решаем уравнение (1.72) графическим способом. Для этого последовательно (последующий – из конца предыдущего) вычертим входящие в него векторы.

Нулевой вектор  $\bar{a}_B$  находится в полюсе и обозначается точкой  $b$ . Через точку  $b$  проведем прямую, параллельную вектору  $\bar{a}_{A'B}^n$ , который проходит параллельно звену  $BC$ . Длина этого вектора (начало вектора – точка  $P_a$ , конец – точка  $n_1$ ) определяется из выражения

$$P_a n_1 = \frac{a_{A'B}^n}{\mu_a}; \quad (1.74)$$

$$P_a n_1 = \frac{0,72}{0,05} = 14,4 \text{ мм.} \quad (1.75)$$

Отложим это расстояние на имеющейся прямой в направлении от точки  $A'$  к точке  $B$  и обозначим его вектором (рис. 1.21). Через точку  $n_1$  проведем прямую, перпендикулярную звену  $BC$  (линия действия вектора  $\bar{a}_{A'B}^\tau$ ) (рис. 1.22). Так как длина вектора неизвестна, перейдем к решению второго уравнения системы.

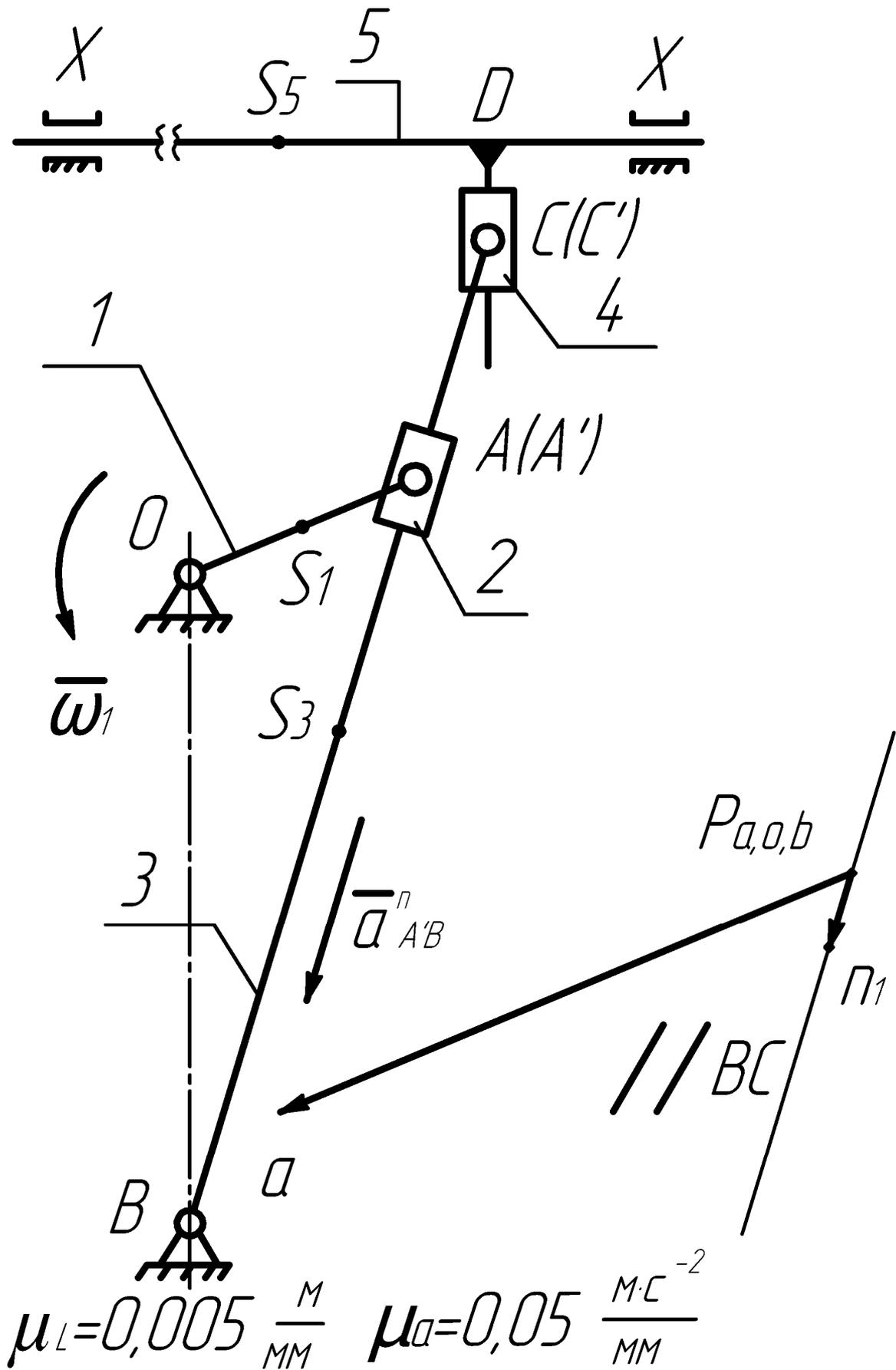


Рис. 1.21

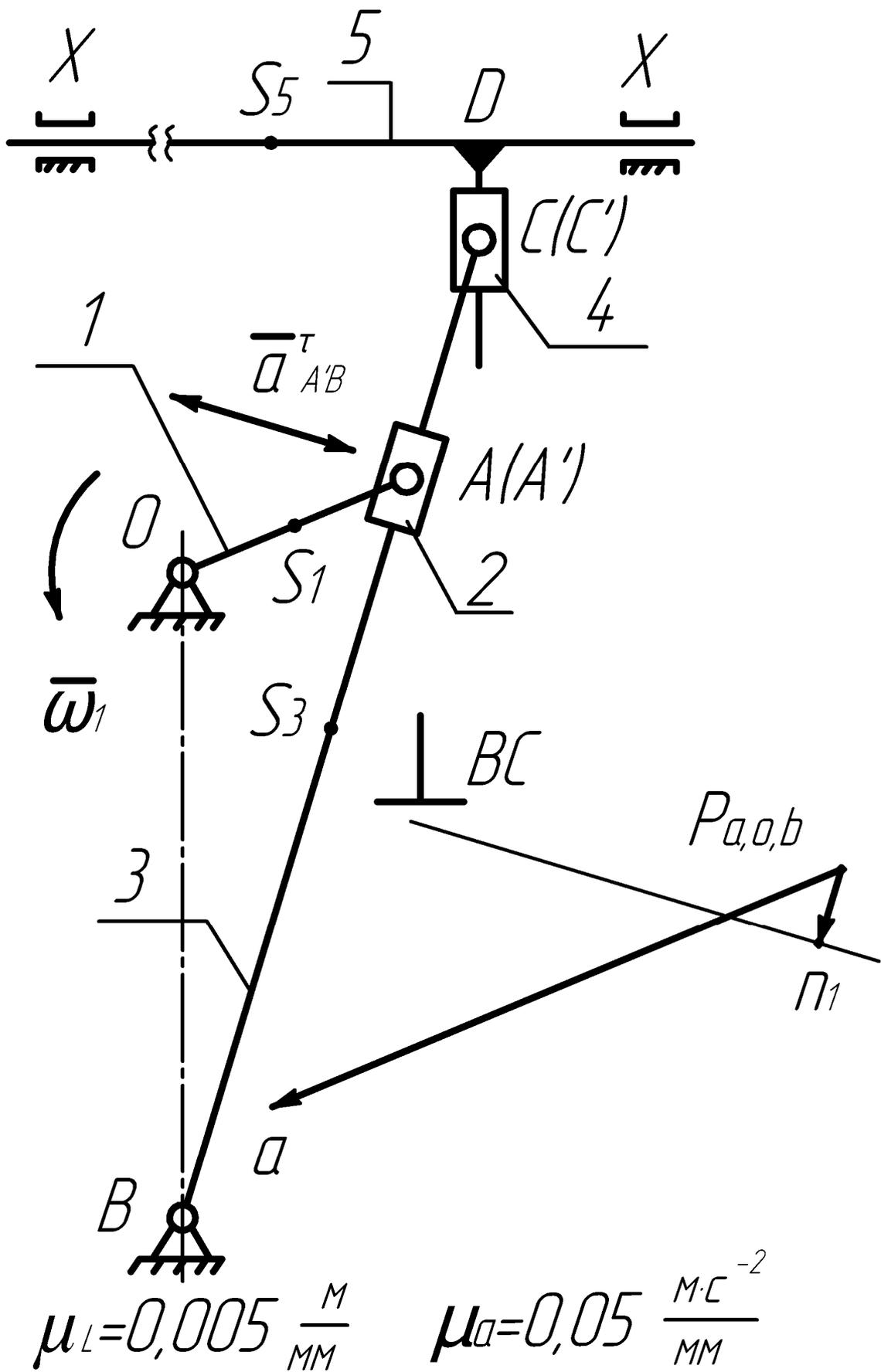


Рис. 1.22

Решаем уравнение (1.73) графическим способом. Для этого последовательно сложим входящие в него векторы.

Вектор  $\bar{a}_A$  уже построен (см. рис. 1.20). Из конца вектора  $\bar{a}_A$  (точка  $a$ ) проведем прямую, повернув на  $90^\circ$  взятый с плана скоростей вектор  $\bar{V}_{A'A}$  (см. рис. 1.15) против часовой стрелки (по направлению  $\bar{\omega}_3$ ) (рис. 1.23).

Зная действительное значение кориолисова ускорения (выражение (1.71)), на основании (1.60) можно определить длину этого вектора на плане ускорений.

Для определения длины вектора кориолисова ускорения (начало вектора – точка  $a$ , конец – точка  $k$ ) запишем выражение

$$ak = \frac{a_{A'A}^k}{\mu_a}; \quad (1.76)$$

$$ak = \frac{1,74}{0,05} = 34,8 \text{ мм.} \quad (1.77)$$

Затем отложим на полученной линии действия вектора кориолисова ускорения его длину:  $ak = 34,8$  мм (см. рис. 1.23).

Из конца вектора  $\bar{ak}$  (точка  $k$ ) проведем прямую (линия действия вектора  $\bar{a}_{A'A}$ ), параллельную звену  $BC$ , как показано на рис. 1.24). Длина этого вектора неизвестна.

Рассмотрим совместное решение уравнений (1.72) и (1.73). Пересечение прямой, проходящей через точку  $n_1$ , и прямой, проходящей через точку  $k$ , дает положение точки  $a'$ , которая определяет концы векторов  $\bar{n_1a'}$  и  $\bar{ka'}$  (рис. 1.25).

Точку  $a'$  нужно соединить с точками  $P_a$  и  $a$ , обозначив эти отрезки векторами (рис. 1.26).

Решением уравнения (1.72) будет векторный многоугольник  $P_a n_1 a'$ .

Решением уравнения (1.73) будет векторный многоугольник  $P_a b k a'$ .

Точка  $a'$  построена. В группе Ассур 2–3 остается неизвестным ускорение точки  $C$ .

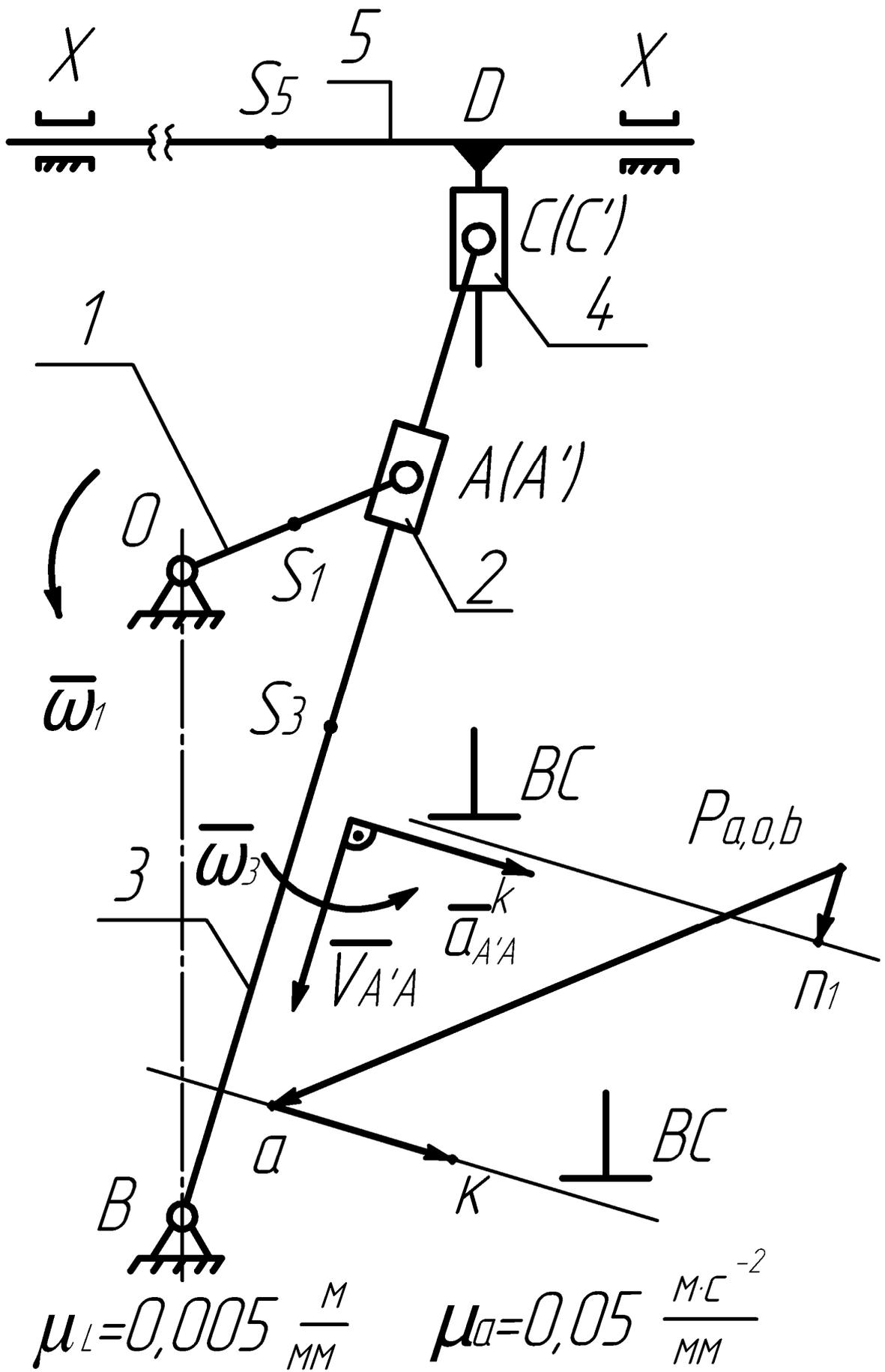


Рис. 1.23

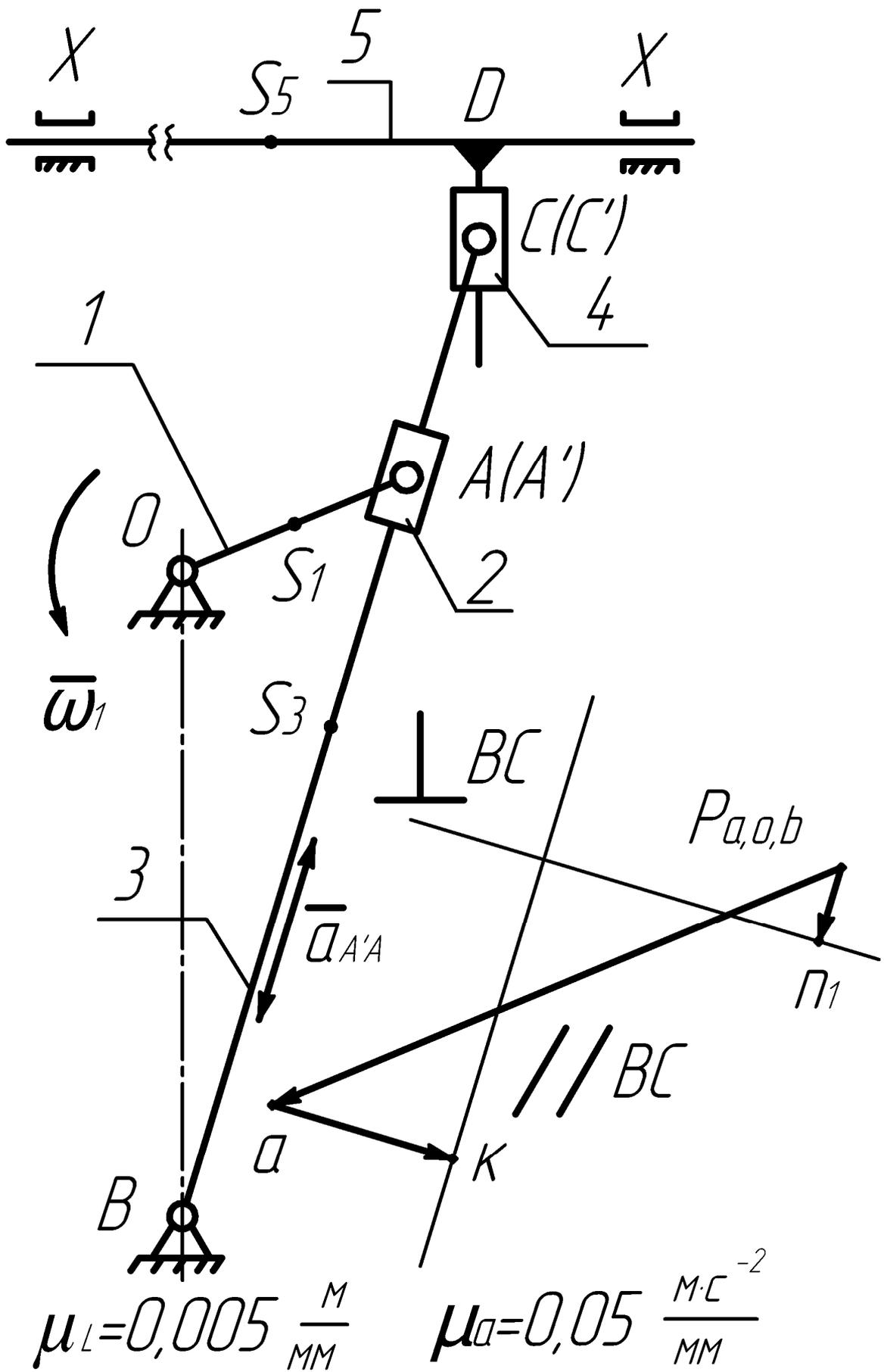


Рис. 1.24

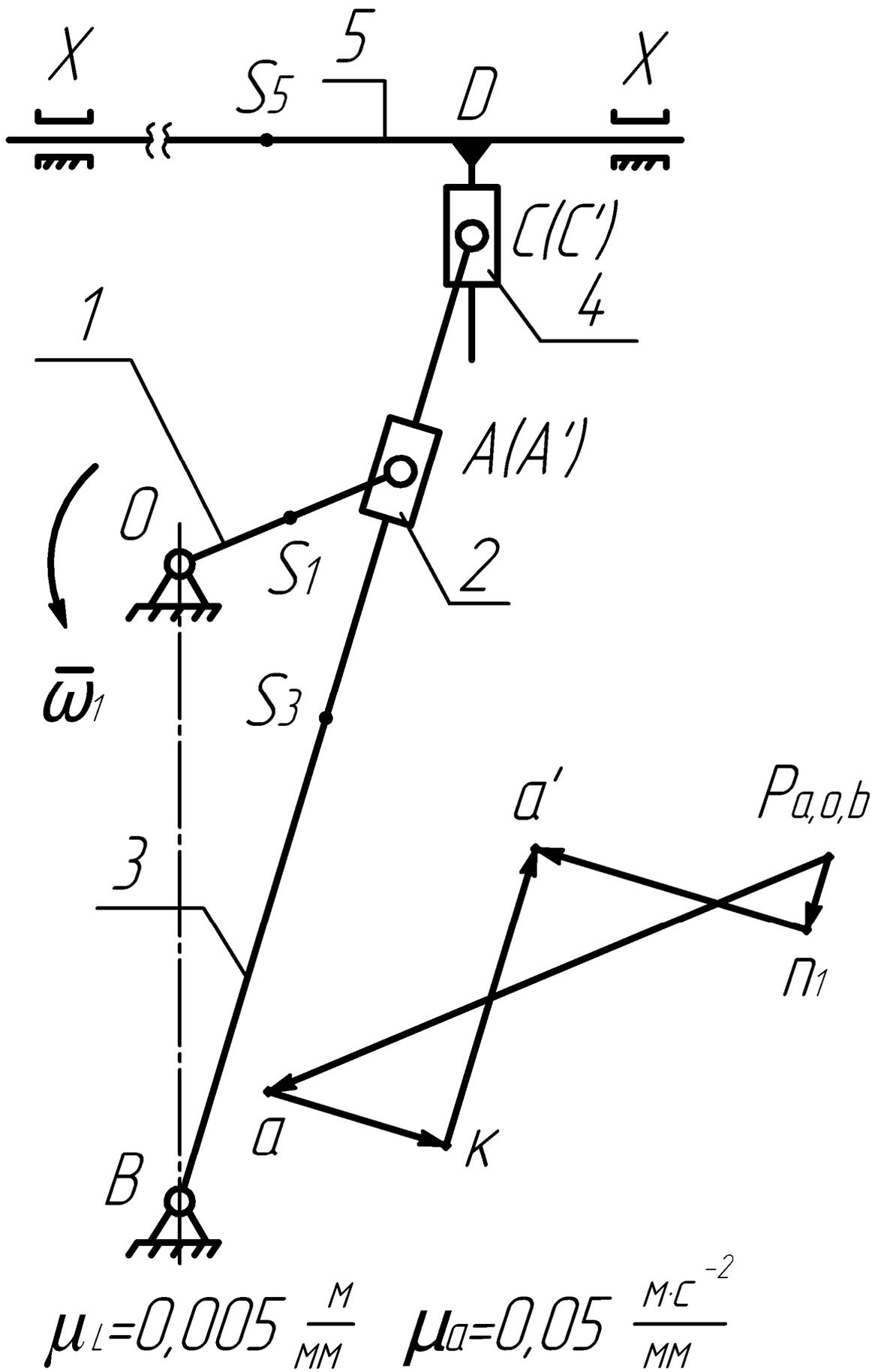


Рис. 1.25

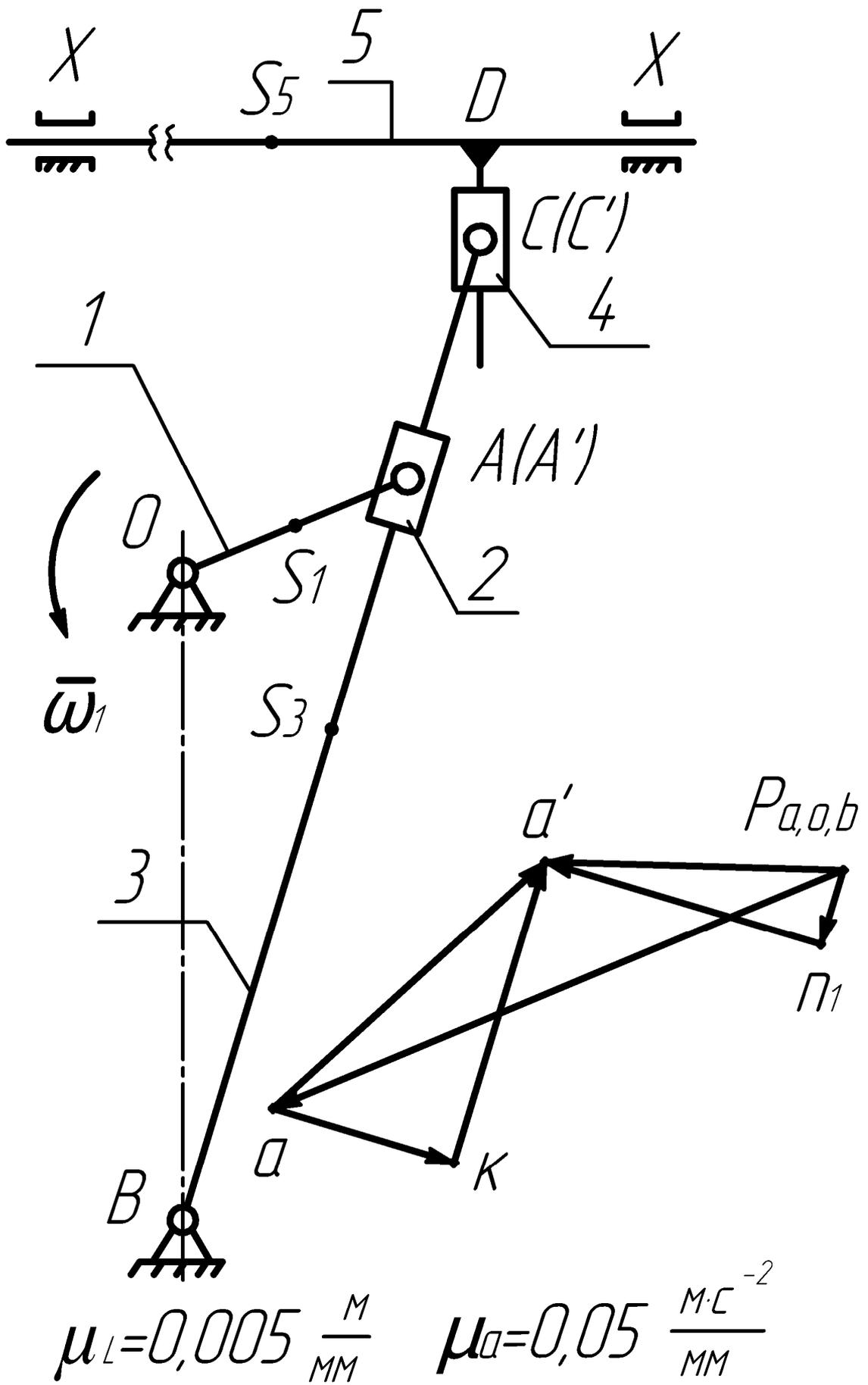


Рис. 1.26

#### 1.5.4. Определение ускорений характерных точек группы 2–3

Если известны ускорения двух точек подвижного звена, то ускорения других точек этого звена можно определить по теореме подобия.

Из теоремы подобия следует, что одноименные фигуры на плане ускорений и на плане механизма подобны.

Ускорения точек  $S_1$ ,  $S_3$  и  $C$  кулисы 3 находим по теореме подобия (рис. 1.27), используя соотношения:

$$\frac{\overline{P_a a}}{\overline{P_a s_1}} = \frac{OA}{OS_1}; \quad (1.78)$$

$$\overline{P_a s_1} = \frac{(P_a a)OS_1}{OA}; \quad (1.79)$$

$$\overline{P_a s_1} = \frac{114 \cdot 22,5}{45} = 57 \text{ мм}; \quad (1.80)$$

$$\frac{\overline{P_a a'}}{\overline{P_a c}} = \frac{BA'}{BC}; \quad (1.81)$$

$$\overline{P_a c} = \frac{(P_a a')BC}{BA'}; \quad (1.82)$$

$$\overline{P_a c} = \frac{55 \cdot 189,9}{143,5} = 72,7 \text{ мм}; \quad (1.83)$$

$$\frac{\overline{P_a a'}}{\overline{P_a s_3}} = \frac{BA'}{BS_3}; \quad (1.84)$$

$$\overline{P_a s_3} = \frac{(P_a a')BS_3}{BA'}; \quad (1.85)$$

$$\overline{P_a s_3} = \frac{55 \cdot 95}{143,5} = 36,4 \text{ мм}. \quad (1.86)$$

Точки, принадлежащие группе Ассур 2–3, построены на плане ускорений.

Рассмотрим группу Ассур 4–5.

Этой группе принадлежат точки  $C$ ,  $C'$ ,  $D$  и  $X$ . Неизвестны ускорения точек  $C'$  и  $D$ . Но, так как они движутся одинаково, достаточно найти ускорение точки  $C'$ .



### 1.5.5. Ускорение точки $C'$

Движение точки  $C'$  рассмотрено выше.

Составим векторные уравнения этого движения внутренней кинематической пары относительно двух внешних (по аналогии с планом скоростей):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{C'} = \bar{a}_X + \bar{a}_{C'X}, \\ \bar{a}_{C'} = \bar{a}_C + \bar{a}_{C'C}, \end{array} \right. \quad (1.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{C'} = \bar{a}_C + \bar{a}_{C'C}, \end{array} \right. \quad (1.88)$$

где  $\bar{a}_{C'}$  – абсолютное ускорение т.  $C'$ ;

$\bar{a}_X$  – абсолютное ускорение т.  $X$ , принадлежащей направляющей;

$\bar{a}_{C'X}$  – ускорение движения т.  $C'$  относительно т.  $X$ ;

$\bar{a}_{C'C}$  – ускорение движения т.  $C'$  относительно т.  $C$ .

В уравнении (1.88) кориолисово ускорение  $\bar{a}_{C'C}^k$  равно нулю потому, что переносное движение является поступательным (т. е.  $\bar{\omega}_{пер} = \bar{\omega}_4 = 0$ ).

Модуль и направление вектора  $\bar{a}_{C'}$  неизвестны. Точка  $X$  неподвижна (принадлежит направляющей), и, соответственно,  $a_X = 0$ .

Линия действия вектора  $\bar{a}_{C'X}$  параллельна неподвижной направляющей  $X-X$ , а его модуль неизвестен. Вектор ускорения  $\bar{a}_C$  построен ранее (см. рис. 1.27). Линия действия вектора  $\bar{a}_{C'C}$  параллельна подвижной направляющей  $C'-D$ , а его модуль неизвестен.

Таким образом, в системе уравнений (1.87) и (1.88) имеется четыре неизвестных, а значит, их можно определить графически.

Решаем графически уравнение (1.87). Построим нулевой вектор  $\bar{a}_X$ . Это точка (точка  $x$ ), расположенная в полюсе плана ускорений (рис. 1.28). Из конца вектора  $\bar{a}_X$  (точка  $x$ ) проведем прямую (линию действия вектора  $\bar{a}_{C'X}$ ), параллельную  $X-X$  (см. рис. 1.28). Длина вектора неизвестна.

Решаем графически уравнение (1.88). Вектор  $\bar{a}_C$  построен ранее. Из конца вектора  $\bar{a}_C$  (точка  $c$ ) проведем линию действия вектора  $\bar{a}_{C'C}$  параллельно  $C'D$  (рис 1.29). Длина этого вектора неизвестна.

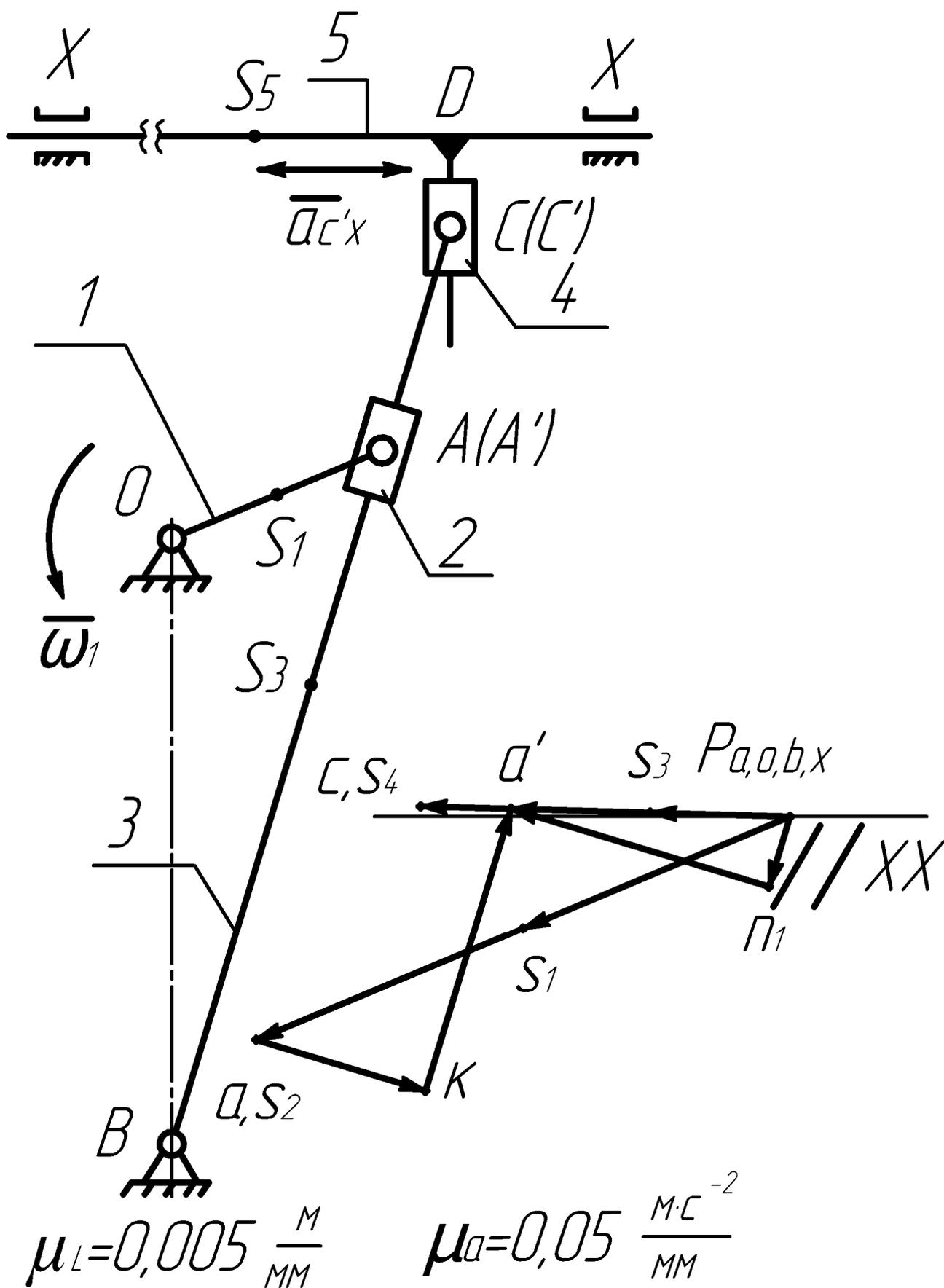


Рис. 1.28

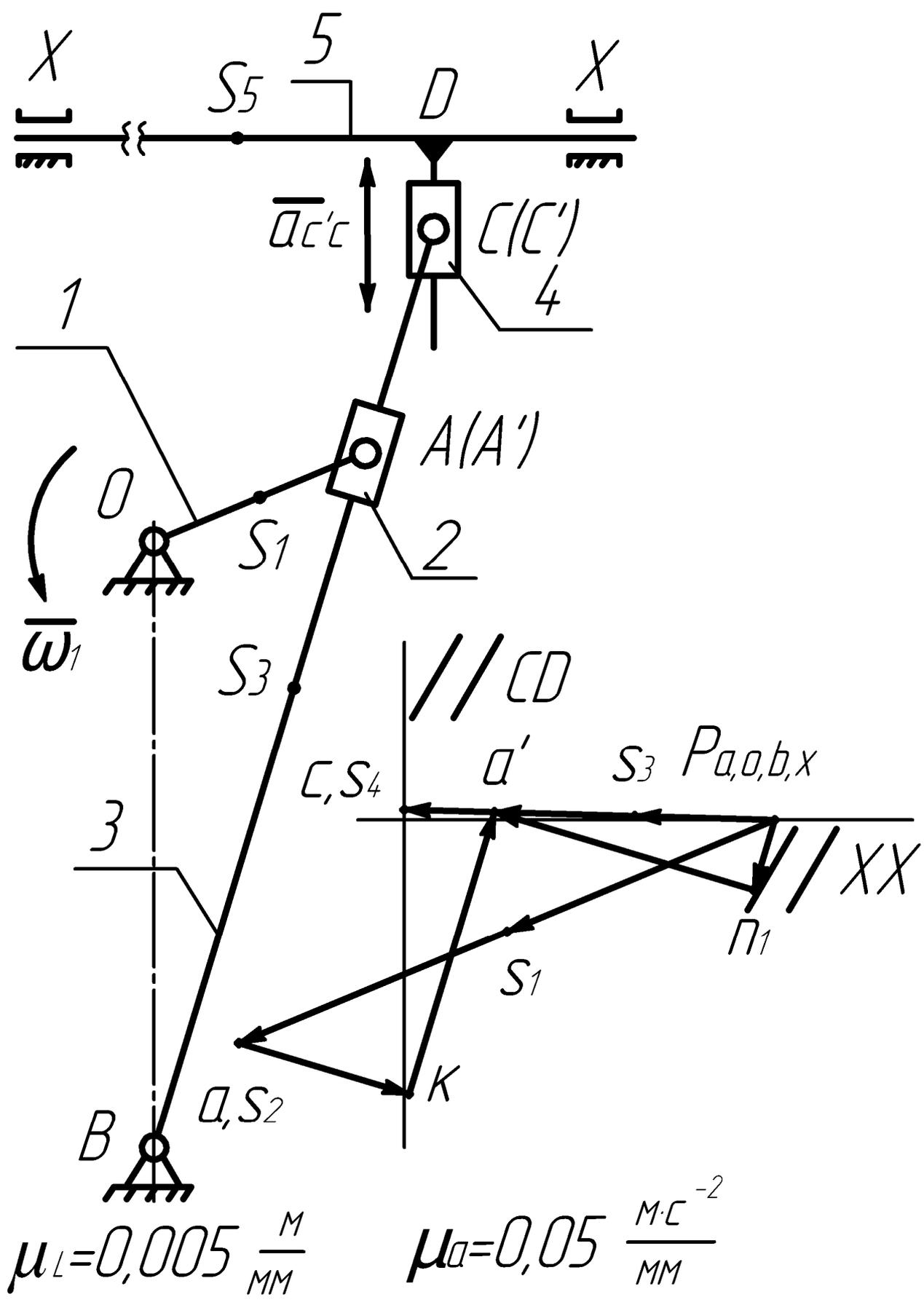


Рис. 1.29

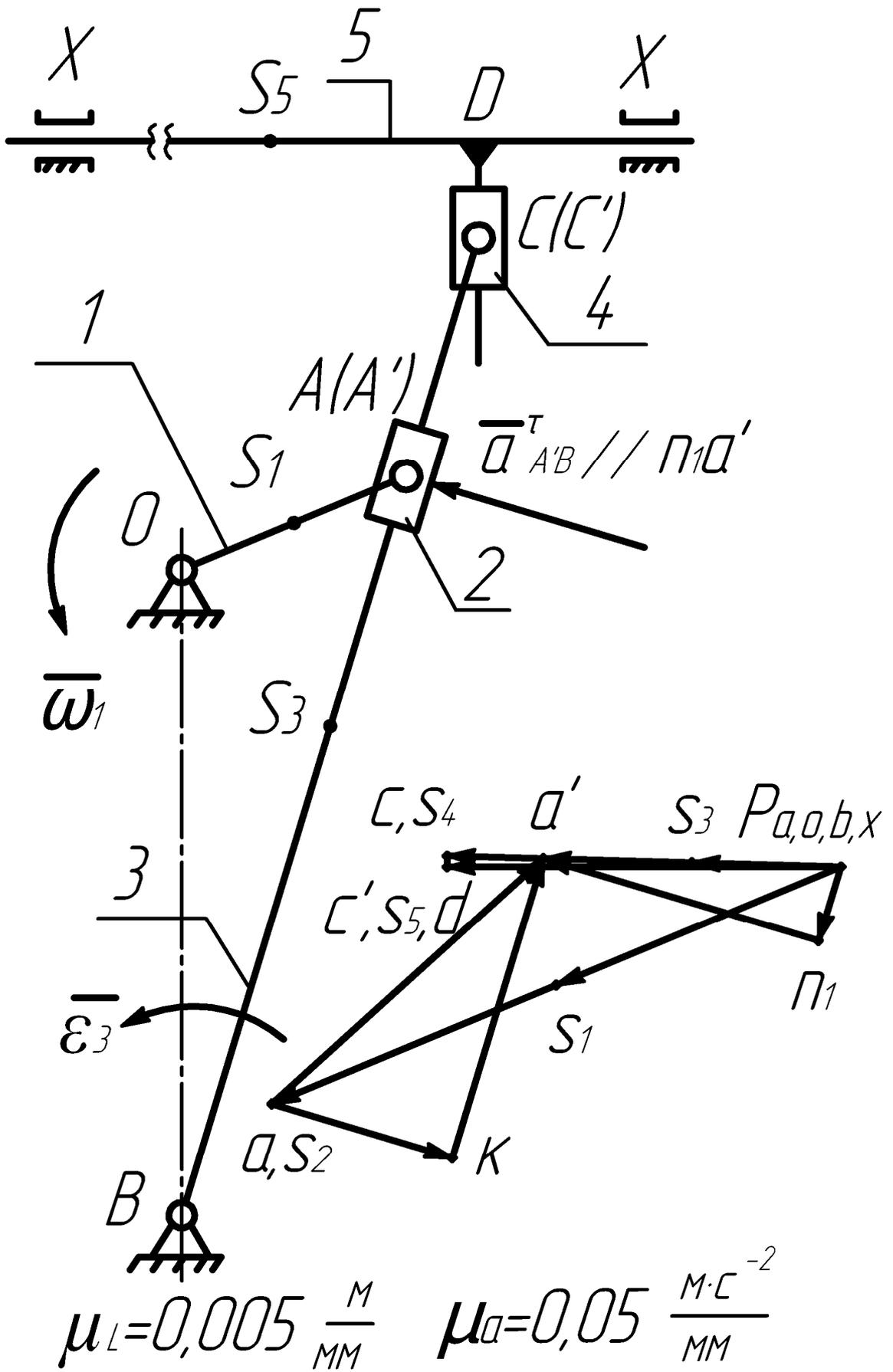


Рис. 1.30

Совместным решением уравнений (1.87) и (1.88) является точка  $c'$  (рис. 1.30) пересечения прямой, проходящей через точку  $P_a$ , и прямой, проходящей через точку  $c$ . Точку  $c'$  нужно соединить с точками  $P_a$  и  $c$ , обозначив эти отрезки векторами (см. рис. 1.30).

Если на плане ускорений определены положения всех точек механизма, значит, план полностью выполнен.

### **1.5.6. Определение истинных значений линейных ускорений точек звеньев**

Замеряя соответствующие отрезки на плане ускорений, находим истинные значения ускорений точек звеньев механизма:

$$a_{S_1} = (P_a s_1) \mu_a; \quad (1.89)$$

$$a_{S_1} = 57 \cdot 0,05 = 2,85 \text{ м/с}^2; \quad (1.90)$$

$$a_{S_3} = (P_a s_3) \mu_a; \quad (1.91)$$

$$a_{S_3} = 36,4 \cdot 0,05 = 1,82 \text{ м/с}^2; \quad (1.92)$$

$$a_{A'} = (P_a a') \mu_a; \quad (1.93)$$

$$a_{A'} = 55 \cdot 0,05 = 2,75 \text{ м/с}^2; \quad (1.94)$$

$$a_D = a_{S_5} = a_{C'} = (P_a c') \mu_a; \quad (1.95)$$

$$a_D = a_{S_5} = a_{C'} = 72,7 \cdot 0,05 = 3,64 \text{ м/с}^2; \quad (1.96)$$

$$a_{S_2} = a_A = (P_a a) \mu_a; \quad (1.97)$$

$$a_{S_2} = a_A = 113 \cdot 0,05 = 5,7 \text{ м/с}^2. \quad (1.98)$$

### **1.5.7. Определение угловых ускорений звеньев**

Угловое ускорение звена 1 известно.

Угловое ускорение звена 2 равно угловому ускорению звена 3.

Определим угловое ускорение кулисы 3.

Точка  $A'$  совершает качательное (возвратно-вращательное) движение относительно оси  $B$ .

Связь между угловым ускорением точки, движущейся по дуге окружности, и ее тангенциальным ускорением приведена в формуле

$$\varepsilon_3 = \frac{\bar{a}_{A'B}^\tau}{L_{BA'}}; \quad (1.99)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{(n_1 a') \mu_a}{(BA') \mu_L}; \quad (1.100)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{53,1 \cdot 0,05}{143,5 \cdot 0,005} = 3,69 \text{ с}^{-2}. \quad (1.101)$$

Ориентация  $\bar{\varepsilon}_3$  определяется вектором  $\overline{n_1 a'}$  путем переноса его в точку  $A'$  плана механизма (см. рис. 1.30), откуда видно, что вектор ускорения  $\bar{\varepsilon}_3$  направлен против часовой стрелки.

Таким образом, кинематический анализ завершен, т. к. определены все неизвестные.

Угловые ускорения звеньев 4 и 5 равны нулю, поскольку они совершают поступательные движения относительно стойки.

На этом задачи кинематического анализа рассматриваемого плоского рычажного механизма выполнены.

Используя вышеизложенную методику, можно провести кинематический расчет любого плоского стержневого механизма II класса.

Рассмотренный пример соответствует единственному положению входного звена. Поскольку полностью кинематический анализ механизма заключается в исследовании кинематических параметров за полный цикл движения, то принято изучать 8 или 12 положений входного звена. Трудоемкость такого расчета значительно возрастает. На этом основании рекомендуется проверить полученные результаты при помощи свободно распространяемого в сети интернет программного обеспечения (например, *Контур*, *АКуР*, *ТММ2*, *МЕХ* и т. п.) или при помощи модуля *WinSlider* программного продукта *WimMachine*.

## 2. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КИНЕТОСТАТИКИ

Динамика изучает закономерности движения звеньев механизма под действием приложенных сил. При этом рассматривают две задачи:

- 1) прямая задача динамики (силовой расчет) – определение требуемого силового воздействия, обеспечивающего заданный закон движения системы;
- 2) обратная задача динамики – определение закона движения системы при действительном силовом воздействии.

### 2.1. Задачи и методы силового расчета механизмов

*Цели силового расчета механизма:* определение сил, приложенных к каждому звену механизма; определение реакций в его кинематических парах; определение уравнивающих моментов или уравнивающих сил.

Под последними обычно понимают те неизвестные и подлежащие определению силы или моменты, приложенные к входным звеньям, которые уравнивают системы всех внешних сил и пар сил, всех сил инерции и пар сил инерции. Значение этих сил нужны для определения мощности силовой установки, выполнения расчетов на прочность, жесткость, устойчивость и износ деталей механизма (т. е. для определения размеров, материалов, твердости и т. д.).

Все силы, действующие на механизм, делятся на *внешние* и *внутренние*.

К внешним силам относятся:

- а) движущие силы  $\bar{P}_{дв}$ , приложенные к входным звеньям механизмов. Они совершают положительную работу (т. е. способствуют движению механизма);
- б) силы полезного сопротивления  $\bar{P}_{ПС}$  – это силы, которые совершают работу, требуемую от механизма. Работа сил полезного сопротивления отрицательная (т. е. они противодействуют движению механизма);

в) силы тяжести звеньев  $\bar{G}_i$ . Работа сил тяжести может быть и положительной, и отрицательной – в зависимости от взаимного положения вектора силы тяжести и вектора перемещения центра масс звеньев. За цикл работа сил тяжести равна нулю. *Циклом* называется промежуток времени, в течение которого все параметры механизма принимают первоначальное значение;

г) силы вредного сопротивления:

- сопротивление среды;

- трение в кинематических парах.

Работа сил вредного сопротивления отрицательна.

Внутренними силами являются силы взаимодействия между двумя звеньями, образующими кинематическую пару. По третьему закону Ньютона реакция одного звена на другое равна по величине, но противоположно направлена реакции другого звена на первое:

$$\bar{R}_{1-2} = -\bar{R}_{2-1}, \quad (2.1)$$

где  $\bar{R}_{1-2}$  – реакция действия звена 1 на звено 2;

$\bar{R}_{2-1}$  – реакция действия звена 2 на звено 1.

## 2.2. Определение сил инерции звеньев механизма

Один из методов силового расчета механизмов основывается на принципе Даламбера, который заключается в следующем. Во время работы механизма его звенья в общем случае двигаются с ускорением, в результате чего возникают силы инерции. Если условно приложить силы инерции к звеньям, то сумма всех сил (включая и силы инерции), приложенных к звеньям, равна нулю (в этом случае применимы уравнения статики).

Такой силовой расчет механизмов называется *кинетостатическим расчетом* или просто *кинетостатикой механизмов*.

Рассмотрим определение сил инерции для различных случаев движения звеньев.

Из курса теоретической механики известно, что в общем случае плоскопараллельного движения звена ускорения его различных точек отличаются по величине и направлению. Поэтому различны и элементарные силы инерции, условно приложенные в этих точках:

$$d\bar{P}_i = -\bar{a}_i \cdot dm_i, \quad (2.2)$$

где  $d\bar{P}_i$  – силы инерции элементарного участка звена;

$\bar{a}_i$  – ускорение элементарного участка звена;

$dm_i$  – масса элементарного участка звена.

Эта система элементарных сил сводится к одной силе инерции  $\bar{P}_u$  и к одной паре сил инерции с моментом  $\bar{M}_u$ . Искомые величины определяются с помощью следующих выражений:

$$\bar{P}_{ui} = -m_i \cdot \bar{a}_{Si}; \quad (2.3)$$

$$\bar{M}_{ui} = -J_{Si} \cdot \bar{\varepsilon}_i, \quad (2.4)$$

где  $m_i$  – масса звена, кг;

$a_{Si}$  – ускорение центра масс звена, м/с<sup>2</sup>;

$\varepsilon_i$  – угловое ускорение звена, 1/с<sup>2</sup>;

$J_{Si}$  – момент инерции массы звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения звена, кг·м<sup>2</sup>.

Частными случаями плоскопараллельного движения будут:

а) вращательное неравномерное движение звена вокруг оси, проходящей через центр масс звена. Система сил инерции приводится только к одной паре сил, момент которой определяется в соответствии с формулой (2.4);

б) поступательное движение звена. Действует только сила инерции в соответствии с формулой (2.3);

в) равномерное вращение звена ( $\varepsilon = 0$ ) вокруг оси, не проходящей через центр масс. Действует только сила инерции в соответствии с формулой (2.3);

г) равномерное вращение ( $\varepsilon = 0$ ) звена вокруг оси, проходящей через центр масс. Сила и момент пары сил инерции отсутствуют.

Часто удобно силу инерции  $\bar{P}_u$  и момент сил инерции  $\bar{M}_u$  привести к одной равнодействующей силе  $\bar{P}_u$  (рис. 2.1).

Для этого заменим момент  $\bar{M}_u$  парой сил:  $\bar{P}_u$  и  $-\bar{P}_u$  (рис. 2.1, а).

Из равенства момента сил инерции и момента пары сил следует:

$$P_u \cdot h = M_u, \quad (2.5)$$

где  $h$  – плечо силы инерции, м.

Силу  $\bar{P}_u$  этой пары приложим в центре масс  $S$  звена (см. рис. 2.1, а).

Тогда другая сила  $\bar{P}_u$  окажется приложенной в некоторой точке  $K$  звена (см. рис. 2.1, а).

Силы  $\bar{P}_u$  и  $-\bar{P}_u$ , приложенные в центре масс, взаимно уравновешиваются, и, таким образом, остается только одна сила, приложенная в точке  $K$  звена (рис. 2.1, б). Эта точка называется точкой качания звена.

Таким образом,  $h = SK$  и находится из выражения (2.5):

$$h = \frac{M_u}{P_u}. \quad (2.6)$$

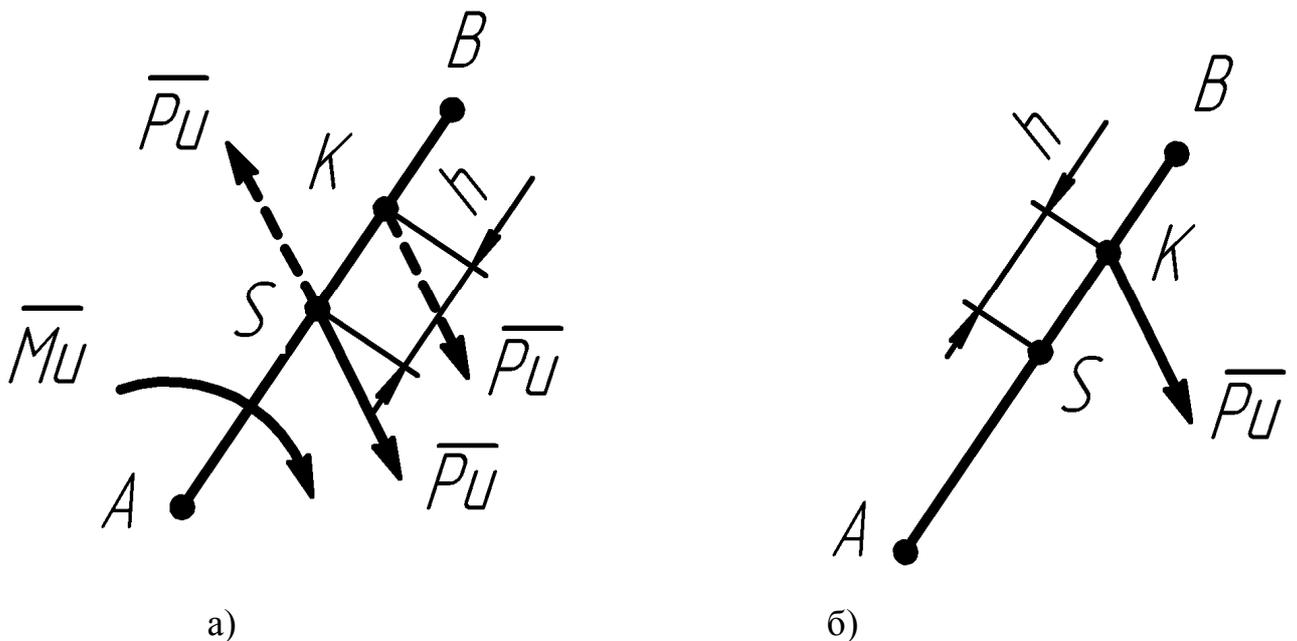


Рис. 2.1

### 2.3. Условие статической определимости кинематической цепи

Для осуществления силового расчета механизма (какой-нибудь кинематической цепи) необходимо, чтобы она была статически определимой, т. е. чтобы число уравнений равновесия, которые можно составить для этой кинематической цепи, было равно числу неизвестных.

При использовании принципа Даламбера применяются следующие уравнения статики:

1) сумма проекций на оси координат всех сил, приложенных к телу, равна нулю или векторная сумма всех сил равна нулю:

$$\bar{P}_i = 0; \quad (2.7)$$

2) уравнение моментов всех сил, приложенных к телу, относительно какой-либо точки равно нулю:

$$\bar{M}_i^{(k)} = 0. \quad (2.8)$$

Если система состоит из нескольких тел, то уравнения статики применимы как ко всей системе, так и к каждому звену в отдельности.

Пусть кинематическая цепь состоит из  $n$  звеньев, соединенных в  $p_1$  кинематических пар I класса и  $p_2$  пар II класса.

Тогда для всей плоской кинематической цепи можно составить  $3n$  уравнений равновесия по принципу Даламбера (уравнение равновесия всей кинематической цепи (2.7); уравнение моментов каждого из звеньев цепи (2.8)).

При записи уравнения равновесия отдельного звена появляется еще одна неизвестная – реакция, заменяющая влияние отброшенной системы. Она появляется и при записи уравнения моментов.

Поскольку сила – вектор, то она характеризуется тремя параметрами: модулем, направлением и точкой приложения.

Рассмотрим, какие из этих параметров являются известными, а какие неизвестными для реакций в кинематических парах.

Силы реакции (силы взаимодействия) между двумя соприкасающимися телами (звеньями) при отсутствии трения всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям. Поэтому во вращательной кинематической паре каждая элементарная сила взаимодействия между звеньями, образующими кинематическую пару, будет проходить через центр шарнира (рис. 2.2, б). Следовательно, и равнодействующая (реакция  $\bar{R}_{1-2}$ ) будет проходить через эту точку. Величина и направление этой силы нам неизвестны, они зависят от внешних сил.

Таким образом, во вращательной кинематической паре известна только точка приложения и неизвестны величины и направления реакции (одно известное и два неизвестных).

В поступательной кинематической паре (рис. 2.2, а) реакция  $R_{1-2}$  взаимодействия звеньев известна только по направлению (она направлена, если пренебречь трением, перпендикулярно оси относительного движения звеньев). Ни величина реакции, ни точка ее приложения неизвестны (одно известное, два неизвестных).

В высшей кинематической паре II класса (рис. 2.2, в) реакция  $R_{1-2}$  направлена по общей нормали (при отсутствии трения) в точке касания звеньев. Поэтому в такой кинематической паре известны точка приложения и направление силы реакции. Неизвестной является ее величина (два известных, одно неизвестное).

Таким образом, кинематические пары I класса дают два неизвестных, а кинематические пары II класса – одно неизвестное.

1. *Поступательная пара.* Известна линия действия, но неизвестны величина и точка приложения (см. рис. 2.2, а).

2. *Вращательная пара.* Реакция во вращательной паре неизвестна по величине и направлению. Известна только точка приложения (см. рис. 2.2, б).

Кинематическая цепь будет статически определимой, если число неизвестных равно числу уравнений:

$$2p_1 + 1p_2 = 3n. \quad (2.9)$$

После преобразования выражения (2.9) получим

$$3n - 2p_1 - 1p_2 = 0. \quad (2.10)$$

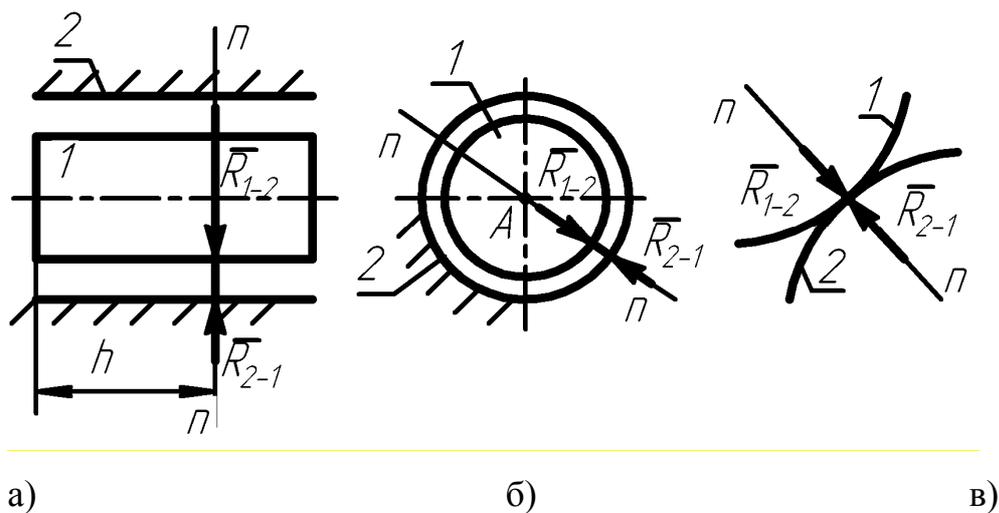


Рис. 2.2

Выражение, стоящее в левой части равенства (2.10), показывает количество степеней подвижности плоской кинематической цепи. Следовательно, статически определимыми являются кинематические цепи с нулевой степенью подвижности. В механизмах, в состав которых входят только кинематические пары I класса, такими цепями являются группы Ассур. Следовательно, группы Ассур являются статически определимыми.

Для кинетостатического исследования необходимо провести структурный анализ механизма, так как он подразумевает, что исследование проводится для каждой структурной группы в отдельности. При этом действие отброшенной (предыдущей) группы Ассур на текущую кинематическую цепь заменяется реакцией, приложенной в точке соединения групп. Эта реакция, согласно III закону Ньютона, должна быть направлена в противоположную сторону.

Силовой расчет механизма ведется в порядке, обратном кинематическому исследованию. Сначала ведется расчет последней присоединенной группы Ассур, в которую входит выходное звено (к которому приложена сила технологического сопротивления), затем предыдущей и т. д. В конце выполняется силовой расчет входного звена (кривошипа).

## 2.4. Исходные данные для силового расчета

Рассмотрим пример силового расчета кулисного механизма, находящегося в том положении, для которого проведен кинематический анализ (см. рис. 1.25) и для которого известны:

- 1) размеры звеньев;
- 2) закон движения кривошипа  $OA$ ;
- 3) положения центров масс звеньев;
- 4) инерционные характеристики звеньев:

$$m_1 = 12,4 \text{ кг}; \quad (2.11)$$

$$m_2 = 24 \text{ кг}; \quad (2.12)$$

$$m_3 = 41,5 \text{ кг}; \quad (2.13)$$

$$m_4 = 23 \text{ кг}; \quad (2.14)$$

$$m_5 = 32 \text{ кг}; \quad (2.15)$$

$$J_{S3} = m_3 \frac{l_{BC}^2}{12}; \quad (2.16)$$

$$J_{S3} = 41,5 \cdot \frac{(0,95)^2}{12} = 3,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad (2.17)$$

5) сила полезного сопротивления, действующая во время рабочего хода звена 5 по заданному закону (рис. 2.3):

$$P_{ПС_{\max}} = 100 \text{ Н}; \quad (2.18)$$

6) кинематические параметры звеньев и точек (координаты, скорости и ускорения).

Требуется:

- 1) определить реакции в кинематических парах механизма;
- 2) определить уравновешивающую силу  $P_{ур}$ ;
- 3) провести проверку правильности расчетов, сравнив результаты значения уравновешивающей силы, полученные двумя методами: кинетостатическим и методом рычага Жуковского.

## 2.5. Порядок силового расчета

### 2.5.1. Определение внешних сил

Закон изменения силы полезного сопротивления  $P_{ПС}$  имеет вид, представленный на рис. 2.3, где  $H_{\max}$  – ход точки  $D$  звена 5.

Для данного положения механизма определим величину  $P_{ПС}$ , направление которой показано на рис. 2.4.

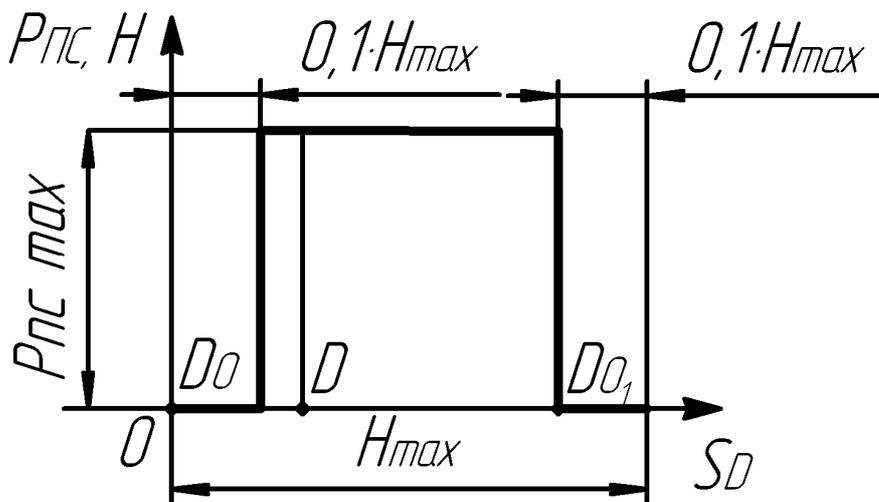


Рис. 2.3

На рис. 2.3 показано положение точки  $D$  в рассматриваемый момент времени, на основании чего можно записать:

$$P_{ПС} = P_{ПС_{\max}} = 100 \text{ Н.} \quad (2.19)$$

Силы инерции действуют на звенья 5, 4, 3, 2 и 1:

$$P_{u5} = m_5 \cdot a_{S5}; \quad (2.20)$$

$$P_{u5} = 32 \cdot 3,64 = 116,5 \text{ Н;} \quad (2.21)$$

$$P_{u4} = m_4 \cdot a_{S4}; \quad (2.22)$$

$$P_{u4} = 23 \cdot 3,64 = 83,7 \text{ Н;} \quad (2.23)$$

$$P_{u3} = m_3 \cdot a_{S3}; \quad (2.24)$$

$$P_{u3} = 41,5 \cdot 1,82 = 75,5 \text{ Н;} \quad (2.25)$$

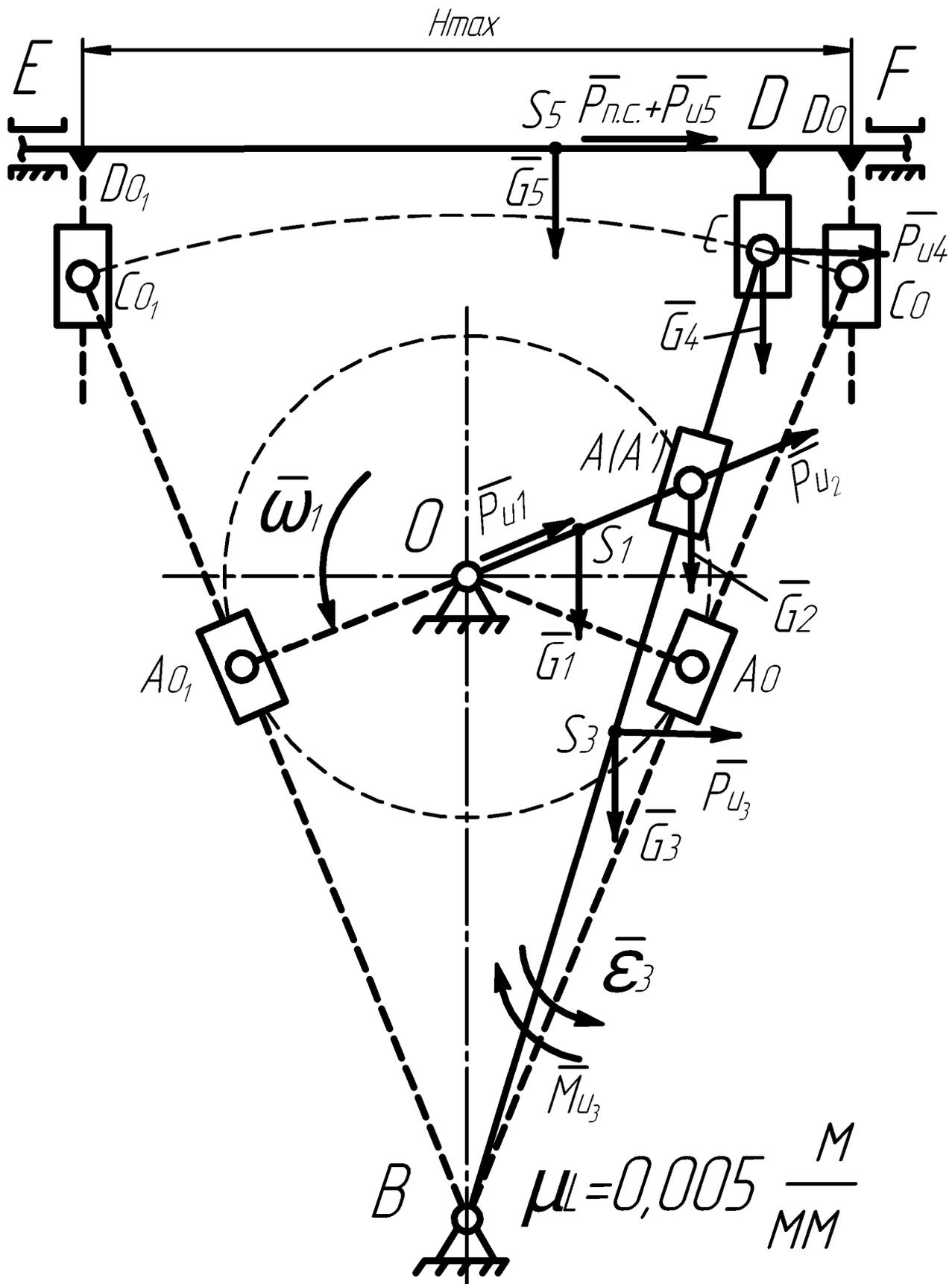


Рис. 2.4

$$P_{u2} = m_2 \cdot a_{S2}; \quad (2.26)$$

$$P_{u2} = 24 \cdot 5,7 = 136,8 \text{ Н}; \quad (2.27)$$

$$P_{u1} = m_1 \cdot a_{S1}; \quad (2.28)$$

$$P_{u1} = 12,4 \cdot 2,85 = 35,3 \text{ Н}. \quad (2.29)$$

Силы тяжести действуют на все звенья:

$$G_5 = m_5 \cdot g; \quad (2.30)$$

$$G_5 = 32 \cdot 9,81 = 314 \text{ Н}; \quad (2.31)$$

$$G_4 = m_4 \cdot g; \quad (2.32)$$

$$G_4 = 23 \cdot 9,81 = 226 \text{ Н}; \quad (2.33)$$

$$G_3 = m_3 \cdot g; \quad (2.34)$$

$$G_3 = 41,5 \cdot 9,81 = 407 \text{ Н}; \quad (2.35)$$

$$G_2 = m_2 \cdot g; \quad (2.36)$$

$$G_2 = 24 \cdot 9,81 = 235 \text{ Н}; \quad (2.37)$$

$$G_1 = m_1 \cdot g; \quad (2.38)$$

$$G_1 = 12,4 \cdot 9,81 = 122 \text{ Н}. \quad (2.39)$$

Моменты сил инерции действуют на звено 3:

$$M_{u3} = J_{S3} \cdot \varepsilon_3; \quad (2.40)$$

$$M_{u3} = 3,2 \cdot 3,69 = 11,8 \text{ Нм}. \quad (2.41)$$

Найденные силы инерции, моменты от сил инерции и силу полезного сопротивления  $P_{ПС}$  прикладываем в соответствующих точках механизма (см. рис. 2.4).

Силы инерции направляем в противоположную сторону ускорениям центров масс, моменты сил инерции – противоположно угловым ускорениям звеньев механизма.

Направление  $P_{ПС}$  задано технологическим процессом работы механизма, т. е. известно из исходных данных.

Кинетостатический анализ проводится для каждой структурной группы в отдельности. Расчет начинаем с группы Ассура 4–5, содержащей выходное звено.

### 2.5.2. Кинестатический расчет группы Ассура 4–5

Строим в произвольном масштабе  $\mu_l$  группу Ассура, состоящую из звеньев 4 и 5, и прикладываем силы, действующие на звенья группы (рис. 2.5, а):

а) силы тяжести и инерции звена 5:  $\bar{G}_5$  и  $\bar{P}_{u5}$  в точке  $S_5$ ;

б) силы тяжести и инерции звена 4:  $\bar{G}_4$  и  $\bar{P}_{u4}$  в точке  $C$ ;

г) силу полезного сопротивления  $\bar{P}_{ПС}$ .

Величины, направления и точки приложения этих сил известны;

д) силу реакции звена 0 (стойки) на звено 5 –  $\bar{R}_{0-5}$ .

Величина  $\bar{R}_{0-5}$  неизвестна, а ее линия действия проходит перпендикулярно направляющей  $X-X$ .

Направление силы (вверх или вниз) выбираем произвольно. При этом необходимо отметить, что точка приложения реакции  $\bar{R}_{0-5}$  также неизвестна и находится на некотором (неизвестном в данное время) расстоянии  $h_5$  от точки  $D$ . Следовательно, неизвестными для  $\bar{R}_{0-5}$  являются величина и точка приложения;

е) силу реакции звена 3 на звено 4, приложенную в точке  $C$ , величина и направление которой неизвестны. Поэтому направляем этот вектор произвольно, а истинное его положение найдем из графических построений.

Составим векторное уравнение равновесия группы 4–5 (сначала записываем все известные силы, потом все неизвестные):

$$\bar{P}_{ПС} + \bar{P}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{P}_{u4} + \bar{G}_4 + \bar{R}_{3-4} + \bar{R}_{0-5} = 0. \quad (2.42)$$

В соответствии с вышеизложенным в уравнении (2.42) неизвестными являются:

а) величина и направление реакции  $\bar{R}_{3-4}$ ;

б) величина реакции  $\bar{R}_{0-5}$  и ее точка приложения.

Всего четыре неизвестных. Точка приложения реакции входит в уравнение моментов, а остальные – в векторное уравнение (2.42).

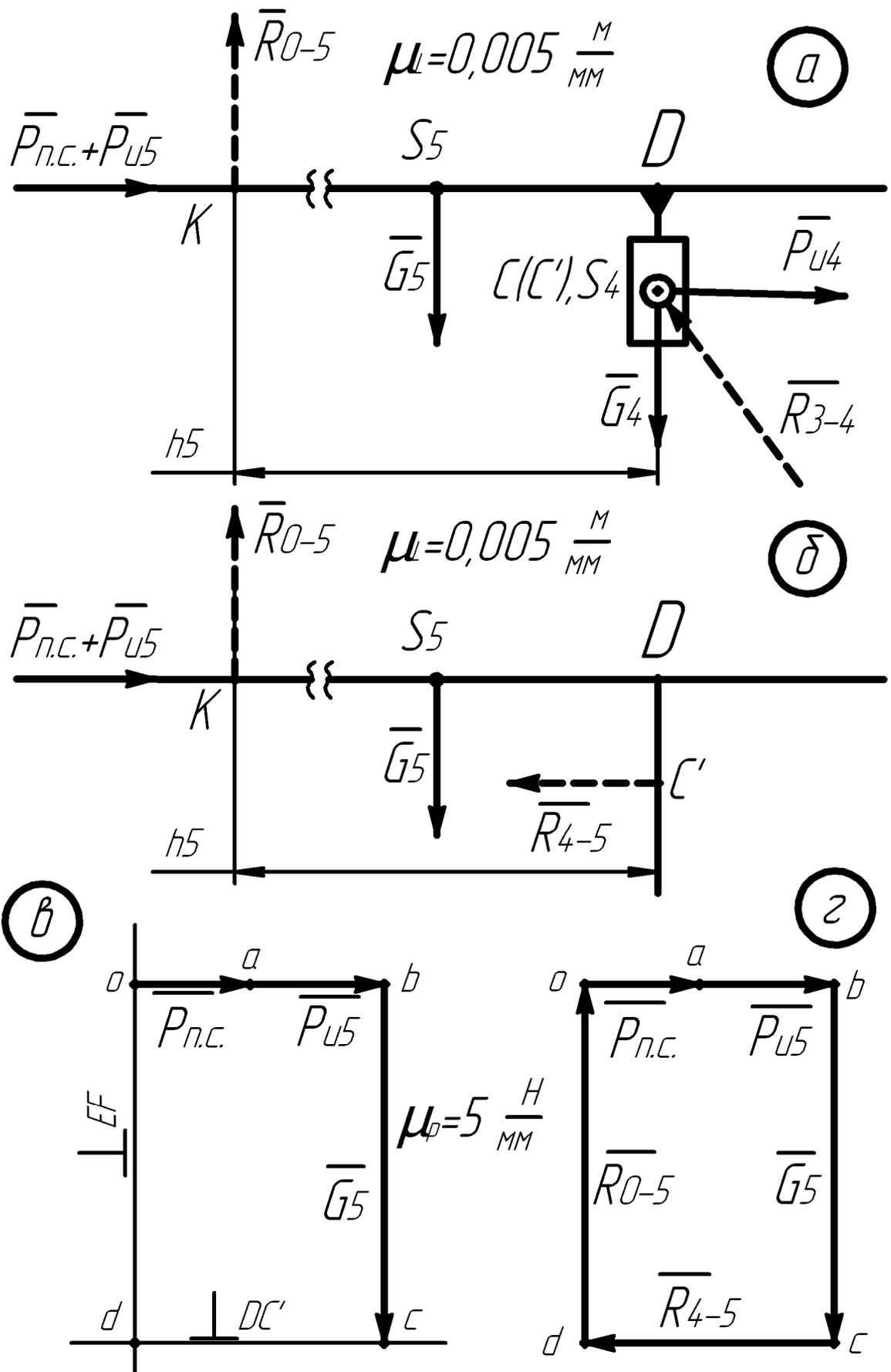


Рис. 2.5

Следовательно, уравнение (2.42) статически неопределимо. Поэтому вначале рассмотрим равновесие звена 5 (рис. 2.5, б).

Уравнение равновесия звена 5 имеет вид (сначала записываем все известные силы, потом все неизвестные)

$$\bar{P}_{ПС} + \bar{P}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{R}_{4-5} + \bar{R}_{0-5} = 0, \quad (2.43)$$

где имеем две неизвестные: модули векторов  $\bar{R}_{0-5}$  (оставшуюся от уравнения (2.42)) и  $\bar{R}_{4-5}$  – новую неизвестную взаимодействия звеньев 4 и 5 друг на друга, которой не было в уравнении (2.42) в связи с ее уравниванием обратной реакцией. Она приложена в точке  $C$  и направлена перпендикулярно направляющей  $DC$ .

На основании уравнения (2.43) построим план сил (рис. 2.5, в, г), масштаб которого

$$\mu_P = \frac{P_{ПС}}{oa}; \quad (2.44)$$

$$\mu_P = \frac{100}{20} = 5 \frac{H}{мм}. \quad (2.45)$$

Масштаб выбирается произвольно.

При этом желательно, чтобы самая маленькая сила отражалась на плане (5 мм и более), если это позволяют размеры листа.

Таким образом, известные силы уравнения (2.43) представим в виде отрезков:

$$oa = \frac{P_{ПС}}{\mu_P}; \quad (2.46)$$

$$oa = \frac{100}{5} = 20 \text{ мм}; \quad (2.47)$$

$$ab = \frac{P_{u5}}{\mu_P}; \quad (2.48)$$

$$ab = \frac{116,5}{5} = 23,3 \text{ мм}; \quad (2.49)$$

$$bc = \frac{G_5}{\mu_P}; \quad (2.50)$$

$$bc = \frac{314}{5} = 62,8 \text{ мм.} \quad (2.51)$$

В результате построения плана сил (см. рис. 2.5) по уравнению (2.43) из полюса (точка  $o$ ) отложим отрезок  $oa$ , параллельный соответствующей силе  $\bar{P}_{ПС}$  на указанную величину, мм, из конца вектора этой силы (точка  $a$ ) отложим отрезок  $ab$  таким же образом. Так поступаем и далее для всех известных векторов.

Из конца последнего известного вектора (точка  $c$ ) проведем прямую, определяющую направление вектора  $\bar{R}_{4-5}$  (перпендикулярно  $DC_5$ ). Длина этого вектора неизвестна.

Поскольку векторная сумма уравнения (2.43) равна нулю, то векторный многоугольник плана сил должен быть замкнутым. Для этого из полюса плана сил (точка  $o$ ) проведем прямую, параллельную линии действия силы  $\bar{R}_{0-5}$  (перпендикулярно  $EF$ ). Точка  $d$  пересечения этих прямых будет концом искомого вектора  $\bar{R}_{4-5}$  и началом искомого вектора  $\bar{R}_{0-5}$  (см. рис. 2.5, в, г).

План сил построен.

Определим величины неизвестных реакций:

$$R_{0-5} = do \cdot \mu_P; \quad (2.52)$$

$$R_{0-5} = 62,8 \cdot 5 = 314 \text{ Н}; \quad (2.53)$$

$$R_{4-5} = cd \cdot \mu_P; \quad (2.54)$$

$$R_{4-5} = 43,3 \cdot 5 = 217 \text{ Н.} \quad (2.55)$$

Точка приложения реакции  $\bar{R}_{0-5}$  координируется расстоянием  $h_5$ , определяемым из уравнения моментов от всех сил, действующих на группу 4-5, относительно точки  $C$  (см. рис. 2.5, б) (так как плечо силы входит в уравнение моментов):

$$\sum M_{4-5}^C = 0. \quad (2.56)$$

При составлении уравнения за положительное направление моментов принимаем обход против часовой стрелки:

$$-R_{0-5} \cdot h_5 \cdot \mu_l + G_5 \cdot L_{DS5} - (P_{u5} + P_{ПС}) \cdot L_{CD} = 0. \quad (2.57)$$

Отсюда выразим неизвестную величину:

$$Lh_5 = h_5 \cdot \mu_l = \frac{G_5 \cdot L_{DS5} - (P_{u5} + P_{ПС})L_{CD}}{R_{0-5}}; \quad (2.58)$$

$$Lh_5 = \frac{314 \cdot 0,1 - (116,5 + 100) \cdot 0,09}{314} = 0,038 \text{ м.} \quad (2.59)$$

Знак «+» означает, что точка приложения реакции  $\bar{R}_{0-5}$ , первоначально выбранная произвольно на расстоянии  $h_5$ , расположена верно. Если бы получили знак «-», то точку  $K$  следовало перенести на противоположенную сторону относительно точки  $D$ .

Действие силы  $\bar{R}_{0-5}$  приводит к появлению реакций  $\bar{R}_{0-5}^I$  и  $\bar{R}_{0-5}^{II}$  в опорах  $E$  и  $F$  (рис. 2.6). Для определения этих неизвестных составим два уравнения равновесия системы (уравнения статики). Первое показывает, что сумма всех сил, приложенных к системе, равна нулю:

$$\bar{R}_{0-5} = \bar{R}_{0-5}^I + \bar{R}_{0-5}^{II}. \quad (2.60)$$

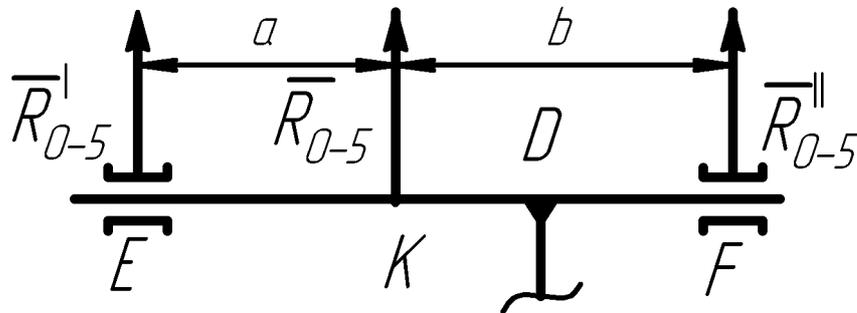


Рис. 2.6

Второе уравнение моментов от сил, действующих на систему, относительно точки  $K$ :

$$R_{0-5}^I \cdot a = R_{0-5}^{II} \cdot b. \quad (2.61)$$

Решая уравнения (2.60) и (2.61), имеем

$$R_{0-5}^I = R_{0-5} - R_{0-5}^{II}; \quad (2.62)$$

$$(R_{0-5} - R_{0-5}^{II})a = R_{0-5}^{II} \cdot b; \quad (2.63)$$

$$R_{0-5}^{II} = R_{0-5} \frac{a}{a+b}; \quad (2.64)$$

$$R_{0-5}^{II} = 314 \frac{102}{102+69} = 187,3 \text{ Н}; \quad (2.65)$$

$$R_{0-5}^I = \bar{R}_{0-5} - \overline{R_{0-5}^{II}}; \quad (2.66)$$

$$R_{0-5}^I = 314 - 187,3 = 126,7 \text{ Н}. \quad (2.67)$$

Теперь в уравнении (2.42) осталось две неизвестные – модуль и направление вектора  $\bar{R}_{3-4}$ . Для его определения строим план сил (по уравнению (2.68)), используя при этом план сил, построенный на рис. 2.5, г.

Перепишем уравнение (2.42) так, чтобы неизвестный вектор был последним:

$$\bar{R}_{0-5} + \bar{P}_{ПС} + \bar{P}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{P}_{u4} + \bar{G}_4 + \bar{R}_{3-4} = 0. \quad (2.68)$$

Определим длины известных векторов, входящих в уравнение (2.68), которые изображаются на плане сил (рис. 2.7, б):

$$ce = \frac{P_{u4}}{\mu_P}; \quad (2.69)$$

$$ce = \frac{83,7}{5} = 16,7 \text{ мм}; \quad (2.70)$$

$$ef = \frac{G_4}{\mu_P}; \quad (2.71)$$

$$ef = \frac{226}{5} = 45,2 \text{ мм}. \quad (2.72)$$

Неизвестный вектор  $\bar{R}_{3-4}$  получим соединением точки  $f$  с началом векторного многоугольника – точкой  $d$ .

После завершения плана сил определяем искомую величину:

$$R_{3-4} = (fd) \cdot \mu_P; \quad (2.73)$$

$$R_{3-4} = 75,4 \cdot 5 = 377 \text{ Н}. \quad (2.74)$$

Силовой расчет группы Ассур 4–5 завершен. Согласно формуле строения механизма, рассмотрим группу Ассур 2–3.

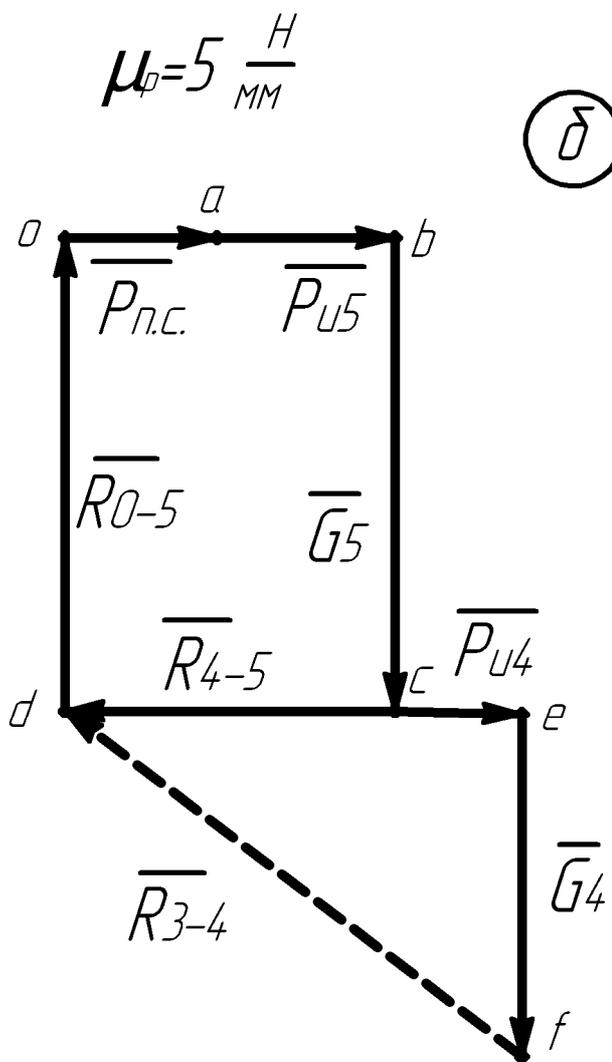
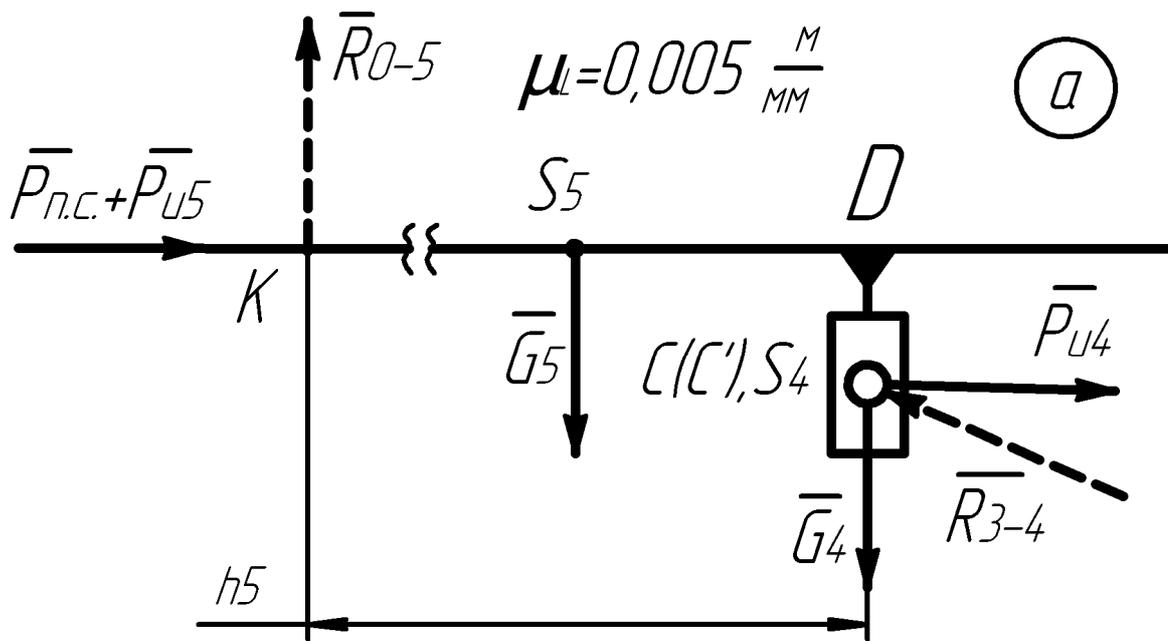


Рис. 2.7

### 2.5.3. Кинестатический расчет группы Ассура 2–3

Построим план группы в масштабе и приложим все внешние силы (рис. 2.8, а). Действие отброшенной группы 4–5 заменяем силой  $\bar{R}_{4-3} = -\bar{R}_{3-4}$ , приложенной в точке  $C$ .

В результате действия этих сил появляются неизвестные реакции в кинематических парах  $\bar{R}_{0-3}$  и  $\bar{R}_{1-2}$ . Реакция  $\bar{R}_{0-3}$  во вращательной кинематической паре неизвестна по величине и направлению (следовательно, вектор проводим произвольно), но приложена в точке  $B$ . Реакция  $\bar{R}_{1-2}$  также неизвестна по величине и направлению, но приложена в центре шарнира  $A$ .

Векторное уравнение равновесия группы 2–3 имеет вид

$$\bar{R}_{4-3} + \bar{P}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{1-2} + \bar{R}_{0-3} = 0. \quad (2.75)$$

Уравнение (2.75) статически неопределимо, так как неизвестны по величине и направлению реакции  $\bar{R}_{0-3}$  и  $\bar{R}_{1-2}$ , т. е. имеем четыре неизвестных.

Таким образом, перед решением уравнения (2.75) необходимо определить две из имеющихся неизвестных.

Существуют два уравнения равновесия статической системы: сумма сил (уравнение (2.75)) и уравнение моментов.

Поэтому вначале рассмотрим равновесие звена 3 (рис. 2.8, б). Векторное уравнение равновесия звена 3 имеет вид

$$\bar{R}_{4-3} + \bar{P}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{2-3} + \bar{R}_{0-3} = 0. \quad (2.76)$$

В уравнении (2.76) добавляется реакция  $\bar{R}_{2-3}$  со стороны отброшенного звена 2, направленная перпендикулярно  $BC$ .

Для определения трех неизвестных (величины и направления реакции  $\bar{R}_{0-3}$  и модуля вектора  $\bar{R}_{2-3}$ ) одного векторного уравнения (2.76) недостаточно. Составим второе уравнение кинестатики – уравнение моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно шарнира  $B$ :

$$\sum M_B^3 = 0; \quad (2.77)$$

$$-R_{4-3} \cdot h_2 \cdot \mu_l + R_{2-3} \cdot A'B \cdot \mu_l - P_{u3} \cdot h_1 \cdot \mu_l - M_{u3} - G_3 \cdot h_3 \cdot \mu_l = 0. \quad (2.78)$$

Решая уравнение (2.78), определим реакцию  $R_{2-3}$ :

$$R_{2-3} = \frac{R_{4-3} \cdot h_2 + P_{u3} \cdot h_1 + M_{u3} / \mu_l + G_3 \cdot h}{A'B}; \quad (2.79)$$

$$R_{2-3} = \frac{377 \cdot 178 + 75,5 \cdot 91,8 + 11,8 / 0,005 + 407 \cdot 27,4}{143,5} = 610,1 \text{ Н.} \quad (2.80)$$

Положительная величина реакции означает, что ее направление выбрано верно. В противном случае следует понимать, что момент указанной силы действует по часовой стрелке.

Таким образом,  $\bar{R}_{2-3}$  следует направить в противоположную сторону.

Теперь в уравнении (2.76) остается две неизвестных (величина и направление вектора  $\bar{R}_{0-3}$ ), и его можно решить графически.

Построим по уравнению (2.76) в масштабе  $\mu_P$  план сил (рис. 2.9), последовательно откладывая отрезки известных векторов:

$$oa = \frac{R_{4-3}}{\mu_P}; \quad (2.81)$$

$$oa = \frac{377}{5} = 75,4 \text{ мм}; \quad (2.82)$$

$$ab = \frac{P_{u3}}{\mu_P}; \quad (2.83)$$

$$ab = \frac{75,5}{5} = 15,1 \text{ мм}; \quad (2.84)$$

$$bc = \frac{G_3}{\mu_P}; \quad (2.85)$$

$$bc = \frac{407}{5} = 81,4 \text{ мм}; \quad (2.86)$$

$$ce = \frac{P_{u2}}{\mu_P}; \quad (2.87)$$

$$ce = \frac{136,8}{5} = 27,4 \text{ мм}; \quad (2.88)$$

$$cd = \frac{R_{2-3}}{\mu_P}; \quad (2.89)$$

$$cd = \frac{610,1}{5} = 122 \text{ мм.} \quad (2.90)$$

Искомый вектор  $\bar{R}_{0-3}$  получим соединением точки  $d$  (конец последнего известного вектора) и точки  $o$  (начало плана сил).

Теперь в уравнении (2.75) остается две неизвестных (величина и направление вектора  $\bar{R}_{1-2}$ ), и его можно решить графически.

Перепишем уравнение (2.75) для удобства построения плана сил:

$$\bar{R}_{0-3} + \bar{R}_{4-3} + \bar{P}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{1-2} = 0. \quad (2.91)$$

Построим план сил (см. рис. 2.9) по уравнению (2.91), используя следующие отрезки:

$$ce = \frac{P_{u2}}{\mu_P}; \quad (2.92)$$

$$ce = \frac{136,8}{5} = 27,4 \text{ мм}; \quad (2.93)$$

$$ef = \frac{G_2}{\mu_P}; \quad (2.94)$$

$$ef = \frac{235}{5} = 47 \text{ мм.} \quad (2.95)$$

В связи с тем, что векторный многоугольник, соответствующий уравнению (2.91), берет начало из точки  $d$ , то искомый вектор  $\bar{R}_{1-2}$  получим соединением точек  $f$  и  $d$ .

Из плана сил определим искомые реакции:

$$\bar{R}_{0-3} = do \cdot \mu_P; \quad (2.96)$$

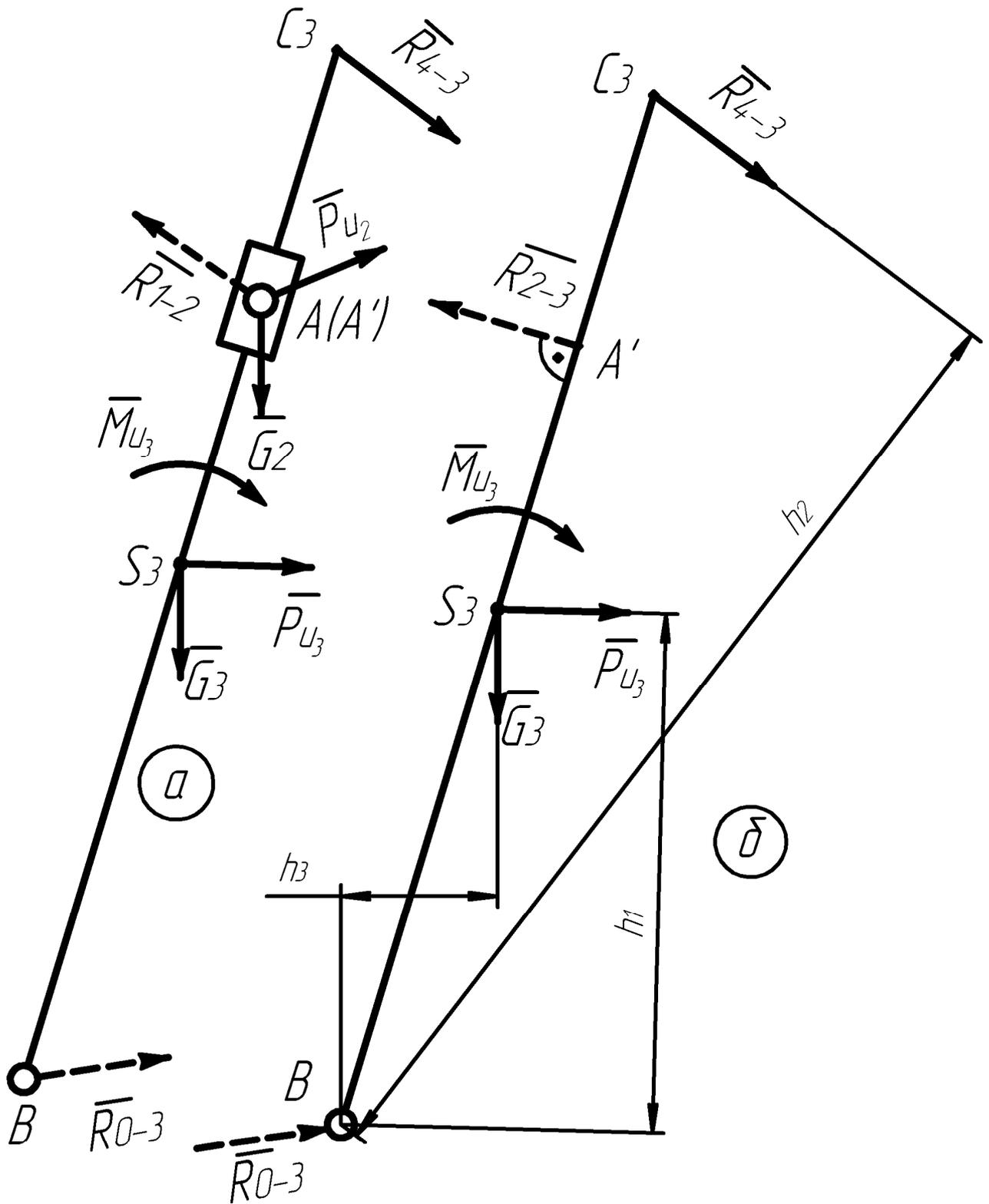
$$\bar{R}_{0-3} = 101 \cdot 5 = 505 \text{ Н}; \quad (2.97)$$

$$R_{1-2} = fd \cdot \mu_P; \quad (2.98)$$

$$R_{1-2} = 167 \cdot 5 = 835 \text{ Н.} \quad (2.99)$$

Все неизвестные, входящие в группу Ассур 2–3, определены.

Затем переходим к рассмотрению следующей структурной группы – механизму I класса, состоящему из звеньев  $0$  и  $1$ .



$$\mu_L = 0,005 \frac{M}{MM}$$

Рис. 2.8

$$\mu_p = 5 \frac{H}{MM}$$

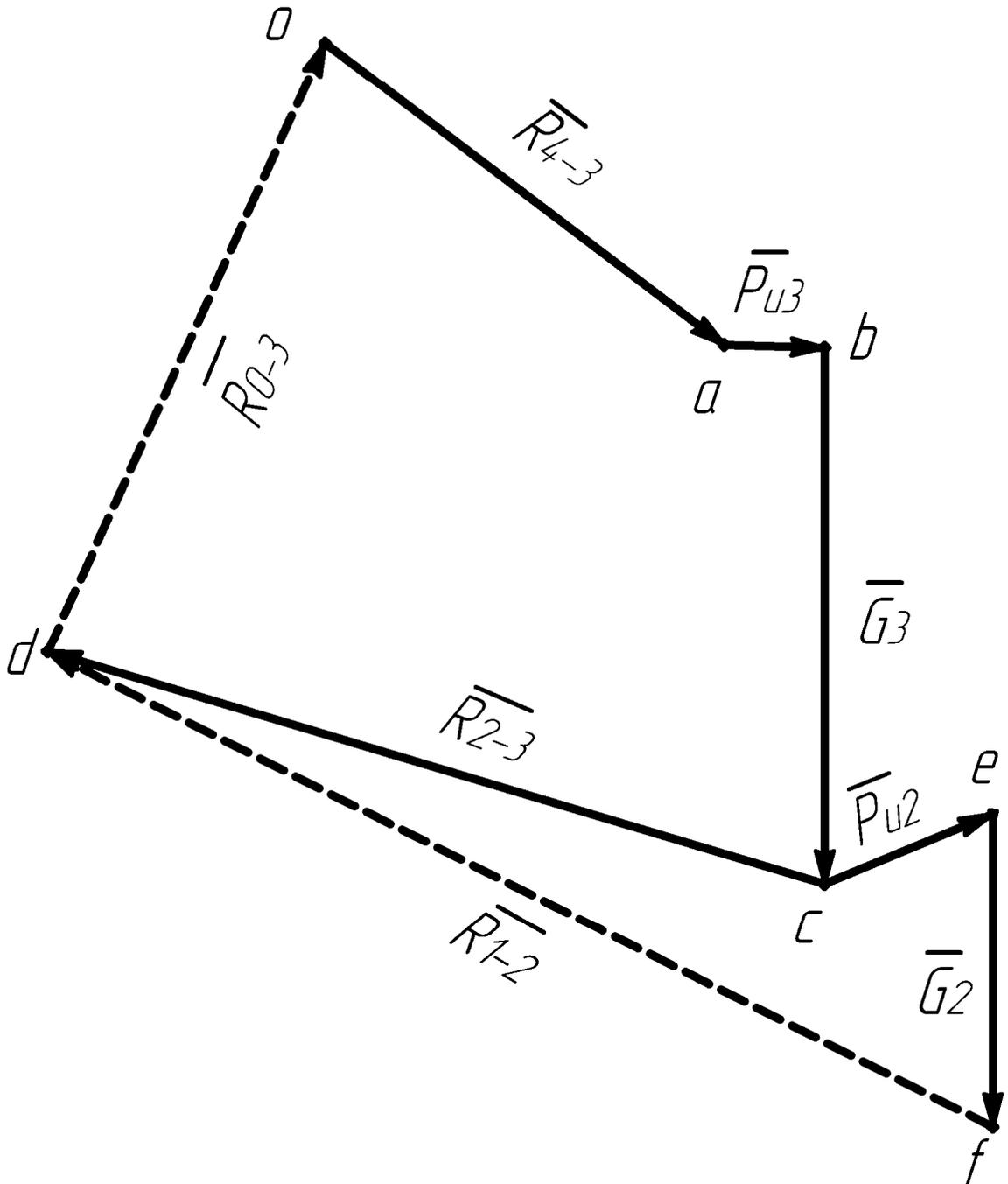


Рис. 2.9

#### 2.5.4. Силовой анализ механизма I класса (звенья 0, 1)

Рассмотрим, как может быть определена в общем случае реакция в кинематической паре, в которую входит входное звено со стойкой (рис. 2.10). Это звено обычно входит со стойкой или в поступательную пару I класса, или во вращательную пару I класса.

В рассматриваемом примере звено  $I$  и стойка  $O$  образуют вращательную кинематическую пару I класса. Из условия статической определенности известно, что под действием произвольно приложенных к входному звену сил, в том числе и сил инерции, оно не находится в равновесии. Чтобы имело место равновесие, необходимо дополнительно ввести силу или пару, уравновешивающую все силы, приложенные к входному звену. Эта сила или момент сил носят названия *уравновешивающей силы*  $\bar{P}_{ур}$  или *уравновешивающего момента*  $\bar{M}_{ур}$ .

Уравновешивающая сила – это теоретическая сила, добавление которой к имеющейся системе сил делает новую систему сил эквивалентной нулю. Уравновешивающая сила  $\bar{P}_{ур}$  может быть приложена в любой точке входного звена.

Однако необходимо помнить, что точка приложения и линия действия уравновешивающей силы полностью определяются конструкцией передаточного механизма от машины, которая приводит в движение рассматриваемый механизм. Удобно эту силу прикладывать в точке, совпадающей с центром элемента шарнира, к которому присоединяется элемент кинематической пары группы Ассур 2–3, а направлять перпендикулярно осевой линии входного звена (кривошипа).

Если вал кривошипа приводится во вращение, например, непосредственно от электродвигателя, то в этом случае к валу должен быть приложен уравновешивающий момент  $\bar{M}_{ур}$ .

Приложим все силы, действующие на звенья механизма I класса, вычерченного в масштабе  $\mu_L$  (рис. 2.10, а).

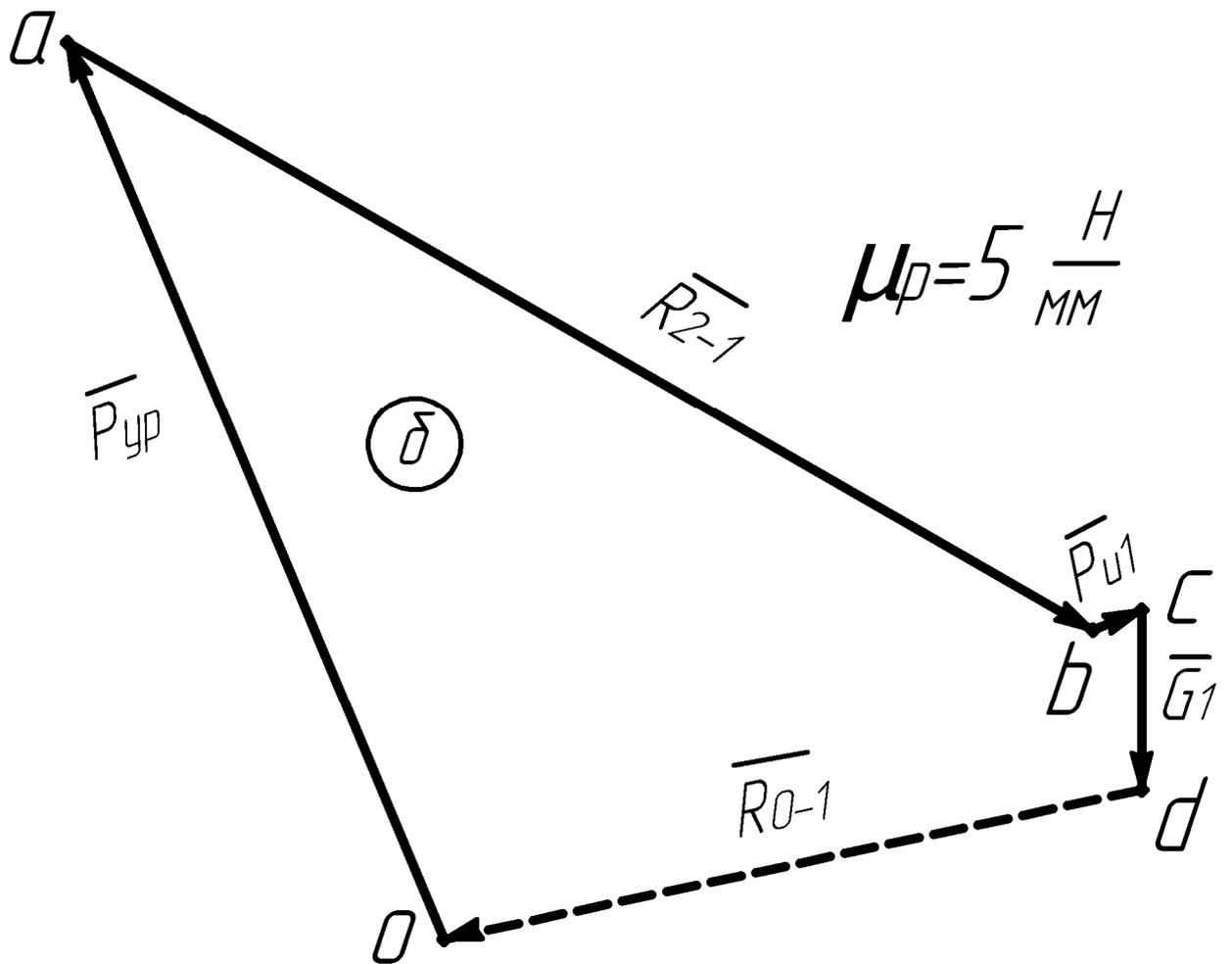
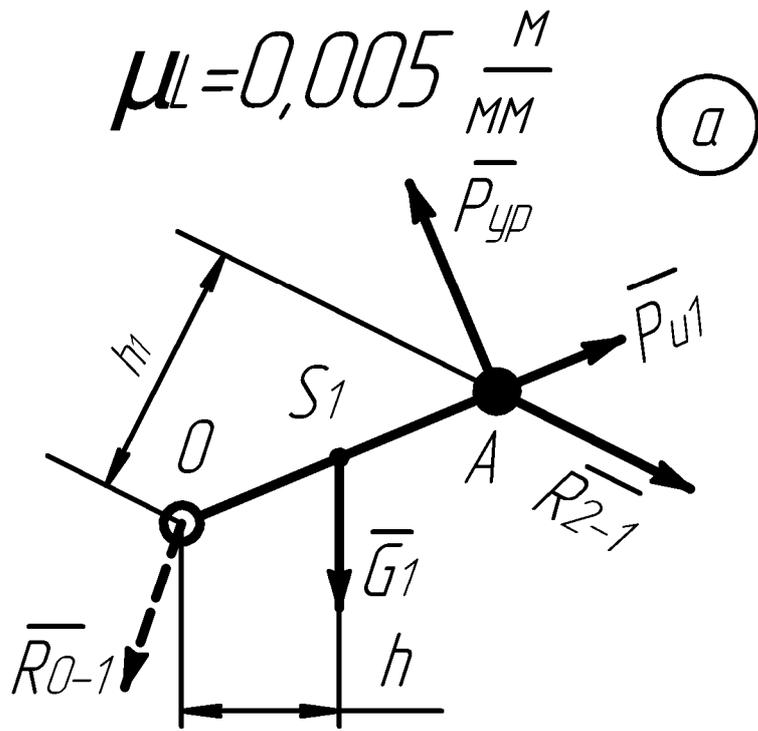


Рис. 2.10

Уравнение равновесия рассматриваемой системы (векторная сумма всех сил, действующих на систему, равна нулю) имеет вид

$$\bar{P}_{yp} + \bar{R}_{2-1} + \bar{P}_{u1} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{0-1} = 0, \quad (2.100)$$

где  $\bar{P}_{yp}$  – уравнивающая сила;

$\bar{R}_{2-1}$  – реакция в шарнире  $A$ , вызванная действием звена 2;

$\bar{R}_{0-1}$  – реакция в опоре  $O$ .

Будем считать, что уравнивающая сила направлена перпендикулярно звену  $OA$  (в произвольную сторону), а ее величина неизвестна.

Реакция со стороны отброшенной системы тел (группы Ассур 4–5 и 2–3) известна по величине и направлению:

$$\bar{R}_{2-1} = -\bar{R}_{1-2}. \quad (2.101)$$

Реакция  $\bar{R}_{0-1}$  во вращательной кинематической паре  $O$  проходит через центр шарнира, а ее величина и направление неизвестны.

Поскольку в уравнении (2.100) число неизвестных больше двух, то оно не имеет решения.

Величина  $\bar{P}_{yp}$  определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на кривошип, относительно центра вращения  $O$ .

Выбор точки  $O$  объясняется тем, что в этом случае момент от неизвестной реакции  $\bar{R}_{0-1}$  обращается в ноль (в связи с тем, что плечо этого момента равно нулю), и, следовательно, в уравнении останется одна неизвестная:

$$\sum M_O^{0-1} = 0; \quad (2.102)$$

$$P_{yp} \cdot L_{OA} - R_{2-1} \cdot h_1 \cdot \mu_l - G_1 \cdot h \cdot \mu_l = 0. \quad (2.103)$$

Решая уравнение (2.103), имеем

$$P_{yp} = \frac{R_{2-1} \cdot h_1 \cdot \mu_l + G_1 \cdot h \cdot \mu_l}{L_{OA}}; \quad (2.104)$$

$$P_{yp} = \frac{0,005(795 \cdot 34 + 122 \cdot 21)}{0,225} = 657,6 \text{ Н}. \quad (2.105)$$

Теперь в уравнении (2.100) осталось две неизвестные: величина и направление вектора  $\bar{R}_{0-1}$ . Для определения  $\bar{R}_{0-1}$  строим план сил в масштабе  $\mu_P$  (рис. 2.10, б) в соответствии с уравнением (2.100), для чего определим длины векторов:

$$oa = \frac{P_{yp}}{\mu_P}; \quad (2.106)$$

$$oa = \frac{657,6}{5} = 131,5 \text{ мм}; \quad (2.107)$$

$$ab = \frac{R_{2-1}}{\mu_P}; \quad (2.108)$$

$$ab = \frac{795}{5} = 159 \text{ мм}; \quad (2.109)$$

$$bc = \frac{P_{u1}}{\mu_P}; \quad (2.110)$$

$$bc = \frac{35,3}{5} = 7,1 \text{ мм}; \quad (2.111)$$

$$cd = \frac{G_1}{\mu_P}; \quad (2.112)$$

$$cd = \frac{122}{5} = 24,4 \text{ мм}. \quad (2.113)$$

Последовательно строим известные векторы (рис. 2.10, б), входящие в уравнение (2.100). Концом последнего известного вектора будет точка  $d$ . Закрывая векторный контур, соединив точки  $d$  и  $o$ , получим искомый вектор  $\bar{R}_{0-1}$ .

Для определения величины искомой реакции запишем:

$$R_{0-1} = do \cdot \mu_P; \quad (2.114)$$

$$R_{0-1} = 95,8 \cdot 5 = 479 \text{ Н}. \quad (2.115)$$

Таким образом, все неизвестные силы определены. Для определения уравновешивающей силы существует дополнительный способ, который дает возможность проверки полученных результатов.

### **2.5.5. Определение уравнивающей силы при помощи теоремы Жуковского о жестком рычаге**

Теорему Жуковского можно сформулировать следующим образом: если все силы, действующие на движущиеся звенья механизма, в том числе силы инерции и уравнивающую силу, приложить в соответствующих точках повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей, то сумма моментов всех этих сил относительно полюса плана скоростей будет равна нулю.

Этой теоремой пользуются в тех случаях, когда нет необходимости определения реакции в кинематических парах, а требуется найти  $\bar{P}_{yp}$  ( $\bar{M}_{yp}$ ), если точка приложения и направление этой силы заданы, а также заданы величины, направления и точки приложения всех остальных сил.

Для приведенного примера при определении  $\bar{P}_{yp}$  построен повернутый на  $90^\circ$  (в сторону вращения входного звена) план скоростей в произвольном масштабе (рис. 2.11).

Все силы с плана механизма перенесены в соответствующие точки плана скоростей параллельно самим себе.

Моменты, действующие на звенья механизма, иногда удобно разложить на пару сил, которые прикладываются в удобных для расчета точках, обычно в центрах шарниров звена.

Тогда величина этих сил

$$P_{Mu} = \frac{M_u}{l}, \quad (2.116)$$

где  $l$  – действительная длина звена, к которому приложен момент  $M_u$ , м.

Затем силы  $P_{Mu}$  переносятся в соответствующие точки повернутого плана скоростей и определяется приведенный момент  $M_u^*$  этих пар сил:

$$M_u^* = M_u \frac{[\bar{l}]}{l}, \quad (2.117)$$

где  $[\bar{l}]$  – длина плеча пары сил  $P_{Mu}$ , приложенных в соответствующих точках повернутого плана скоростей, мм.



При этом знак у момента  $M_u^*$  сохраняется, если направление (порядок букв) на плане механизма и повернутом плане скоростей сохраняется, и получается противоположным, если направление не совпадает:

$$M_{u3}^* = M_{u3} \frac{P_{Vc}}{L_{BC}}; \quad (2.118)$$

$$M_{u3}^* = 11,8 \cdot 95 \div 0,95 = 1180 \text{ Н}\cdot\text{мм}. \quad (2.119)$$

Составим уравнение моментов относительно полюса:

$$\sum M_{P_V} = 0; \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} & -(P_{ПC} + P_{u5}) \cdot h_5 - P_{u4} \cdot h_4 - M_{u3}^* - G_3 \cdot h_7 - G_4 \cdot h_3 - \\ & - P_{u3} \cdot h_6 - G_1 \cdot h_8 + P_{yp} \cdot h_2 - G_2 \cdot h_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$P_{yp} = \frac{(P_{u5} + P_{ПC})h_5 + P_{u4} \cdot h_4 + M_{u3}^* + G_3 \cdot h_7 + G_4 \cdot h_3 + P_{u3} \cdot h_6 + G_1 \cdot h_8 + G_2 \cdot h_1}{h_2}; \quad (2.122)$$

$$P_{yp} = \left[ \frac{(116,5 + 100) \cdot 91 + 83,7 \cdot 92 + 1180 + 407 \cdot 14 +}{+226 \cdot 27 + 75,5 \cdot 46 + 122 \cdot 52 + 235 \cdot 104} \right] \div 113 = 661 \text{ Н}. \quad (2.123)$$

Если  $P_{yp}$  получится отрицательной величиной, то сделанное предположение о ее направлении было неправильным. Ее направление на плане скоростей необходимо изменить на обратное.

Определим величину ошибки вычисления  $P_{yp}$  по формуле

$$\Delta P_{yp} = \frac{P_{yp}^I - P_{yp}^{II}}{P_{yp}^{max}} 100\%; \quad (2.124)$$

$$\Delta P_{yp} = \frac{661 - 657,6}{661} 100\% = 0,65\%. \quad (2.125)$$

Разница при определении  $P_{yp}$  методом рычага Жуковского и методом кинестатики не должна превышать 5 %, т. е.  $\Delta P_{yp} \leq 5\%$ .

Таким образом, все пункты расчета выполнены и силовой анализ механизма завершен. Его результаты необходимы для проведения расчетов на прочность и жесткость элементов конструкции механизма, определения потребной мощности на работу механизма.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВИКА

Регулирование колебаний скоростей в период установившегося движения осуществляется с помощью добавочных масс. В практике эти добавочные массы называют маховыми колесами. В пособии эта задача решается двумя методами: методом Виттенбауэра и методом Мерцалова.

#### 3.1. Средняя скорость главного вала и коэффициент неравномерности

В машинах и механизмах рассматриваются действительная и средняя арифметическая  $\omega_{cp}$  скорости (рис. 3.1).

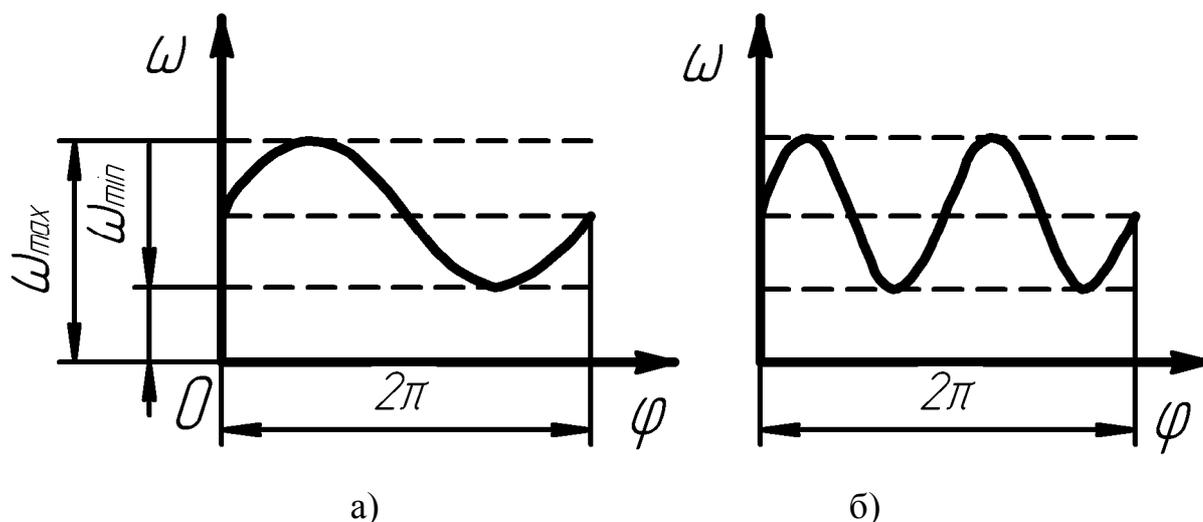


Рис. 3.1

При определении маховых масс пользуются понятием средней арифметической скорости  $\omega_{cp}$ , величина которой определяется по формуле

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \quad (3.1)$$

где  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$  – максимальные и минимальные значения скоростей соответственно.

Неравномерность движения машин и механизмов определяется коэффициентом неравномерности  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}. \quad (3.2)$$

Задача регулирования движения механизма или машины в период установившегося движения сводится к подбору такого соотношения между массами звеньев механизмов и действующими на них силами, при которых коэффициент неравномерности  $\delta$  не превышает какого-либо заранее заданного значения.

В дальнейших расчетах потребуется зависимость между  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{cp}$  и  $\delta$ . Преобразуем уравнения (3.1) и (3.2):

$$\omega_{\max} + \omega_{\min} = 2\omega_{cp}; \quad (3.3)$$

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \delta\omega_{cp}. \quad (3.4)$$

Сложим и вычтем уравнения (3.4) и (3.3), получим

$$\omega_{\max} = \omega_{cp}(1 + 0,5\delta); \quad (3.5)$$

$$\omega_{\min} = \omega_{cp}(1 - 0,5\delta); \quad (3.6)$$

$$\omega_{\max}^2 \approx \omega_{cp}^2(1 + \delta); \quad (3.7)$$

$$\omega_{\min}^2 \approx \omega_{cp}^2(1 - \delta). \quad (3.8)$$

Коэффициент неравномерности движения характеризует только перепад угловой скорости звена привода в пределах от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ , но не характеризует динамику движения звена привода внутри одного полного цикла периода установившегося движения.

Так, на рис. 3.1 представлены два графика зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$ , у которых  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  равны, но угловые ускорения  $\varepsilon$  для случая, показанного на рис. 3.1, б, значительно больше, чем для случая на рис. 3.1, а. Динамические характеристики механизмов с этими значениями  $\varepsilon$  различны.

Сравнительная оценка динамических свойств механизма или машины в

период установившегося движения может быть охарактеризована коэффициентом динамичности  $\chi$ , в качестве которого берут отношение экстремального (наибольшего) значения углового ускорения  $\varepsilon$  к квадрату средней угловой скорости:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{ext}}{\omega_{cp}^2}, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon_{ext}$  – максимальная величина углового ускорения входного звена.

### 3.2. Приведение сил и масс

Метод приведения сил и масс позволяет движение системы звеньев сводить к эквивалентной задаче движения одного звена механизма (звена приведения) или одной точки звена (точки приведения), т. е. производить моделирование движения машинного агрегата. Обычно за звено приведения принимается входное звено, а за точку приведения – точка входного звена.

Приведенная тангенциальная сила определяется по формуле

$$P_{ПП}^{\tau} = \frac{\sum N_i}{V_{ПП}}, \quad (3.10)$$

где  $\sum N_i$  – сумма мгновенных мощностей, развиваемая силами и моментами, приложенными к механизму;

$V_{ПП}$  – скорость точки приведения.

Приведенный момент равен

$$M_{ПП} = \frac{\sum N_i}{\omega_{ПП}}, \quad (3.11)$$

где  $\omega_{ПП}$  – угловая скорость звена приведения.

Между  $P_{ПП}^{\tau}$  и  $M_{ПП}$  существует зависимость

$$M_{ПП} = P_{ПП}^{\tau} \cdot L, \quad (3.12)$$

где  $L$  – расстояние от точки приведения до центра вращения звена приведения.

В практике удобнее приведенную силу или приведенный момент определять методом рычага Жуковского. Для этого определяют уравнивающую силу от всех внешних сил и сил инерции (в зависимости от поставленной задачи). Величина приведенной силы будет равна величине уравнивающей, а ее направление – противоположно направлению  $P_{ур}$ . Точка приложения  $P_{ПП}^{\tau}$  совпадает с точкой приложения  $P_{ур}$ .

Запишем выражение для определения приведенной массы механизма:

$$m_{ПП} = \frac{2\sum E_i}{V_{ПП}^2}, \quad (3.13)$$

где  $\sum E_i$  – сумма кинетических энергий звеньев механизма, массы которых приводятся к точке приведения.

Найдем приведенный момент инерции массы:

$$I_{ПП} = \frac{2\sum E_i}{\omega_{ПП}^2}; \quad (3.14)$$

$$I_{ПП} = m_{ПП} \cdot L^2. \quad (3.15)$$

При практическом определении  $m_{ПП}$  или  $I_{ПП}$  пользуются следующими развернутыми формулами:

$$m_{ПП} = \sum \left[ m_i \left( \frac{V_{Si}}{V_{ПП}} \right)^2 + I_{Si} \left( \frac{\omega_i}{V_{ПП}} \right)^2 \right]; \quad (3.16)$$

$$I_{ПП} = \sum \left[ m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_{ПП}} \right)^2 + I_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{ПП}} \right)^2 \right], \quad (3.17)$$

где  $m_i, I_{Si}$  – соответственно масса и момент инерции массы  $i$ -го звена относительно его центра масс;

$V_{Si}, \omega_i$  – соответственно абсолютная скорость центра масс  $i$ -го звена и его угловая скорость.

Отношение скоростей можно заменить отношением соответствующих им отрезков плана скоростей или аналогами линейных и угловых скоростей.

### 3.3. Задача расчета маховых колес

Вращение вала звена привода машинного агрегата определяется взаимодействием движущих сил и сил сопротивления. Движущие силы  $M_{дв}$  зависят от характеристики двигателя, а силы сопротивления  $M_c$  зависят, главным образом, от осуществляемого технологического процесса.

Взаимодействие этих двух групп сил определяет мгновенное значение угловой скорости звена привода и появление ее колебаний. Эти колебания изменяют динамические давления в кинематических парах машин, вызывают упругие колебания звеньев, могут ухудшить условия протекания технологического процесса и т. д.

Колебания скорости внутри цикла установившегося движения обуславливаются двумя причинами:

- 1) несовпадением законов изменения приведенных движущих сил и сил сопротивления;
- 2) переменностью за цикл движения значений величин приведенной массы звеньев механизма  $m_{пр}$  или приведенного момента инерции массы звеньев механизма  $I_{пр}$ .

Регулирование периодических колебаний скорости вращения главного вала в период установившегося режима работы осуществляется путем использования в конструкции технической системы добавочных масс (маховое колесо), которые устанавливаются на каком-либо валу привода машинного агрегата.

Эта масса аккумулирует приращение кинетической энергии агрегата, когда работа движущих сил превышает работу сил сопротивления, и отдает накопленную кинетическую энергию при превышении работы сил сопротивления над работой сил движущих, тем самым изменяя коэффициент неравномерности  $\delta$  до требуемой величины.

Существуют различные способы расчета маховых масс.

### 3.4. Определение момента инерции махового колеса методом энергомасс (метод Виттенбауэра)

При расчете маховых масс встречаются следующие варианты:

а) в машинах-двигателях движущий момент есть функция положения, а момент сопротивления принимается постоянной величиной;

б) в рабочих машинах момент сопротивления – функция положения, а движущий момент – величина постоянная.

Расчет момента инерции по данному методу (например, для рабочей машины) проводится в следующем порядке:

1) Строятся графики приведенных моментов от сил сопротивлений и сил тяжести. Приведенные моменты определяются с помощью теоремы Жуковского. По оси ординат в масштабе  $\mu_m$ , Н · м/мм, откладываются значения моментов, по оси абсцисс в масштабе  $\mu_\varphi$ , рад/мм, отмеривается один полный оборот входного звена (рис. 3.2).

2) С помощью графического интегрирования (методом площадей или методом хорд [4, 6]) графика  $M_{ПС}(\varphi)$  строится график работ от приведенных моментов сил  $A_C(\varphi)$  за один цикл установившегося движения (рис. 3.3). График работ от моментов движущих сил  $A_{ДВ}(\varphi)$  – прямая, соединяющая начало графика  $A_C(\varphi)$  с его концом, так как за один цикл установившегося движения эти величины равны.

3) Определяется приращение кинетической энергии  $\Delta E$ :

$$\Delta E = A_{ДВ} - A_C. \quad (3.18)$$

График изменения кинетической энергии  $\Delta E = f(\varphi)$  строится в тех же масштабах, что и графики  $A_C = f(\varphi)$  и  $A_{ДВ}(\varphi)$ . Поэтому ординаты графика  $\Delta E(\varphi)$  находятся простым вычитанием ординат графика  $A_{ДВ}(\varphi)$  из ординат графика  $A_C(\varphi)$  (рис. 3.4). В случае малой разницы ординат работ масштаб  $\Delta E(\varphi)$  можно изменить.

4) Строится график приведенного момента инерции масс рабочей машины  $I_{ПР}(\varphi)$  в масштабах  $\mu_{J\Pi}$  и  $\mu_\varphi$  (рис. 3.5, а). Причем для удобства расчетов масштаб  $\mu_\varphi$  графика  $I_{ПР}(\varphi)$  должен быть равен масштабу  $\mu_\varphi$  графика  $\Delta E(\varphi)$ .

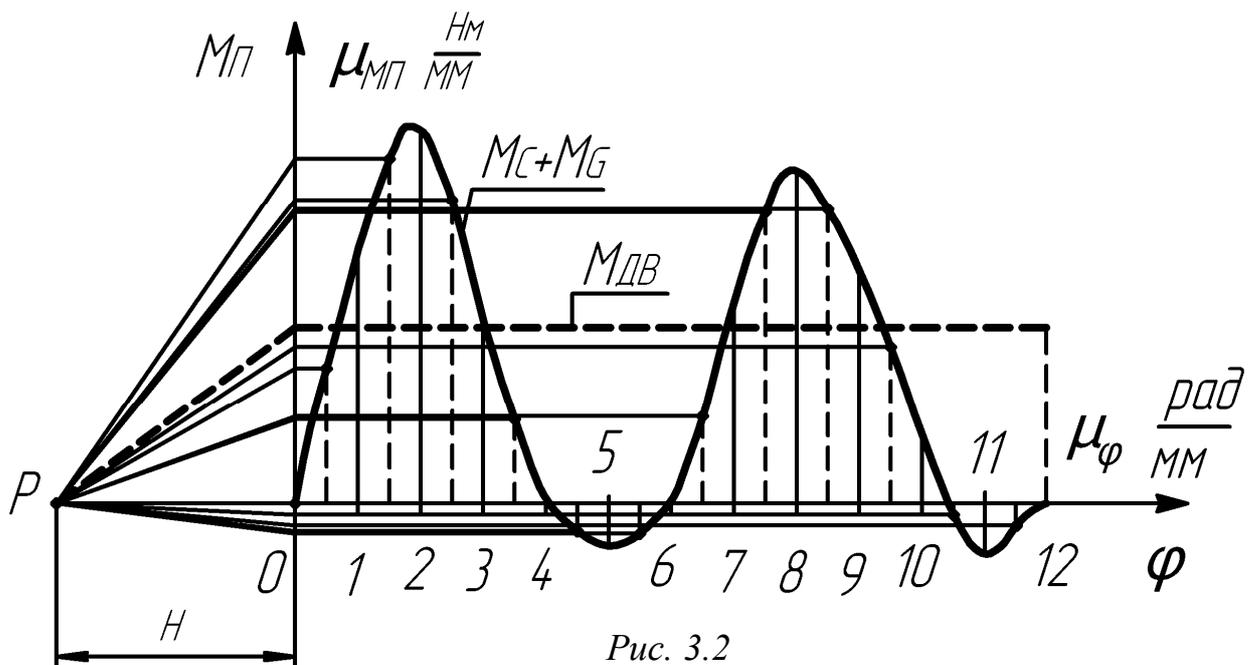


Рис. 3.2

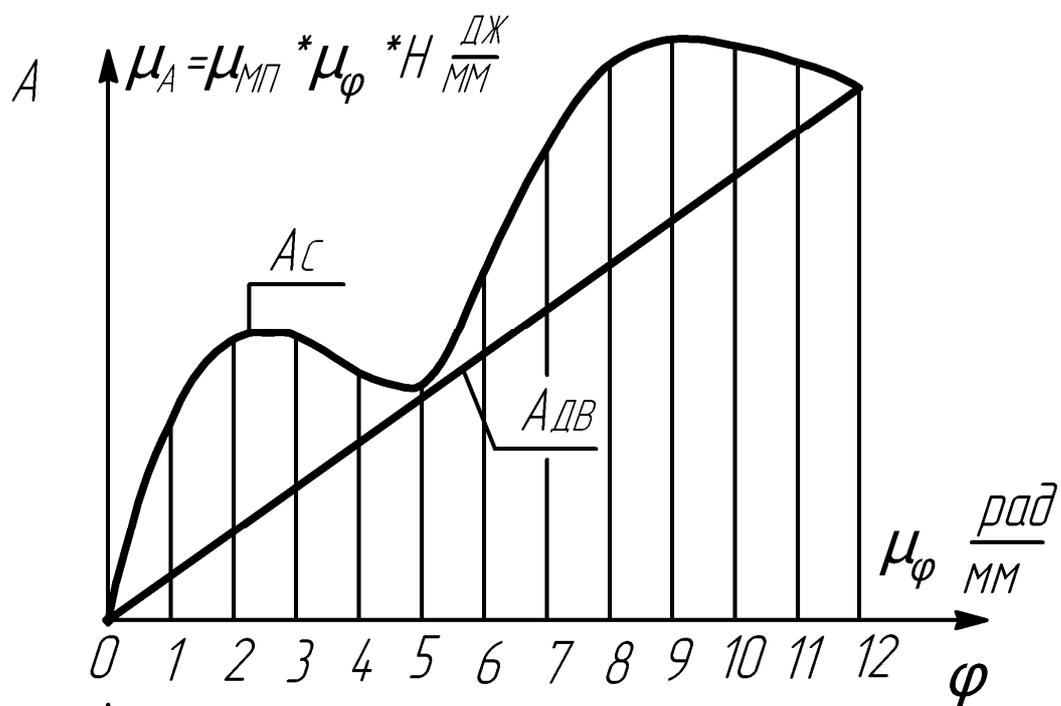


Рис. 3.3

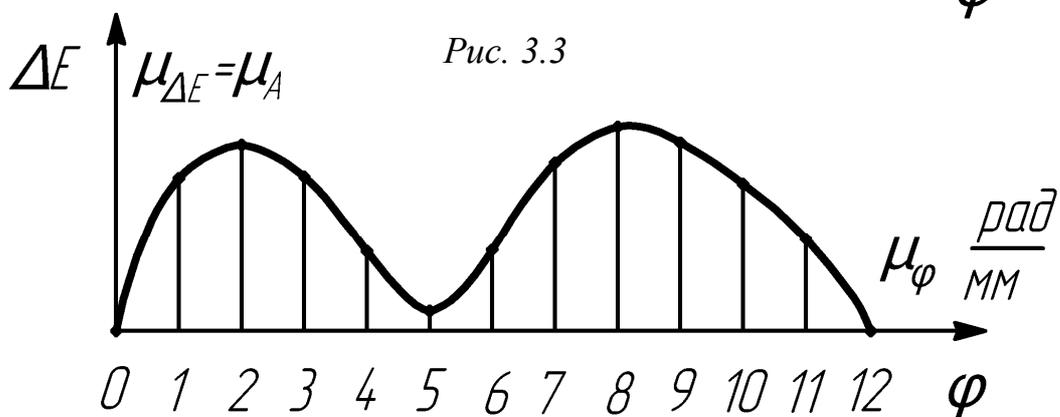


Рис. 3.4



5) С учетом графиков  $\Delta E(\varphi)$  и  $I_{\text{ПР}}(\varphi)$  строим график изменения кинетической энергии в функции приведенного момента инерции масс (диаграмму Виттенбауэра) (см. рис. 3.5, б).

б) Для определения общего момента инерции масс  $I_O$  звеньев механизма, включая и привод, который обеспечивал бы заданный коэффициент неравномерности  $\delta$ , к кривой  $\Delta E(I_{\text{ПР}})$  проводим касательные: сверху – под углом  $\psi_{\text{max}}$ ; снизу – под углом  $\psi_{\text{min}}$  (рис. 3.6, а).

Значения указанных углов определяется по следующим формулам:

$$\text{tg}(\psi_{\text{max}}) = \frac{\mu_{J_{\text{П}}}}{2\mu_E} \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta); \quad (3.19)$$

$$\text{tg}(\psi_{\text{min}}) = \frac{\mu_{J_{\text{П}}}}{2\mu_E} \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta), \quad (3.20)$$

где  $\mu_{J_{\text{П}}}$  и  $\mu_E$  – масштабные коэффициенты графика  $\Delta E(I_{\text{ПР}})$ .

Для более точного проведения касательных под углами  $\psi_{\text{max}}$  и  $\psi_{\text{min}}$  необходимо использовать построение этих углов по их тангенсам (рис. 3.6, б). Измеряя отрезок  $ab$ , отсекаемый касательными на оси  $\Delta E$ , находим суммарный момент инерции массы махового колеса, приведенные моменты инерции масс звеньев двигателя и звеньев передаточного механизма, приведенных к валу маховика:

$$I_O = \frac{ab \cdot \mu_{\Delta E}}{\delta \cdot \omega_{\text{ср}}^2}, \quad (3.21)$$

где  $\mu_{\Delta E}$  – масштабный коэффициент оси ординат графика  $\Delta E(\varphi)$ , причем  $\mu_{\Delta E} = \mu_A$ .

В случае больших значений  $\text{tg}(\psi_{\text{max}})$  или  $\text{tg}(\psi_{\text{min}})$  отрезок  $ab$  уходит за поле чертежа. Тогда для определения величины  $ab$  пользуются следующей формулой:

$$ab = Od \cdot \text{tg}(\psi_{\text{min}}) - Oc \cdot \text{tg}(\psi_{\text{max}}), \quad (3.22)$$

где  $Od$  – отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной, проведенной под углом  $\psi_{\text{min}}$  (см. рис. 3.6, а);

$Oc$  – отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной, проведенной под углом  $\psi_{max}$  (см. рис. 3.6, а);

$c$  и  $d$  – точки (см. рис. 3.6, а).

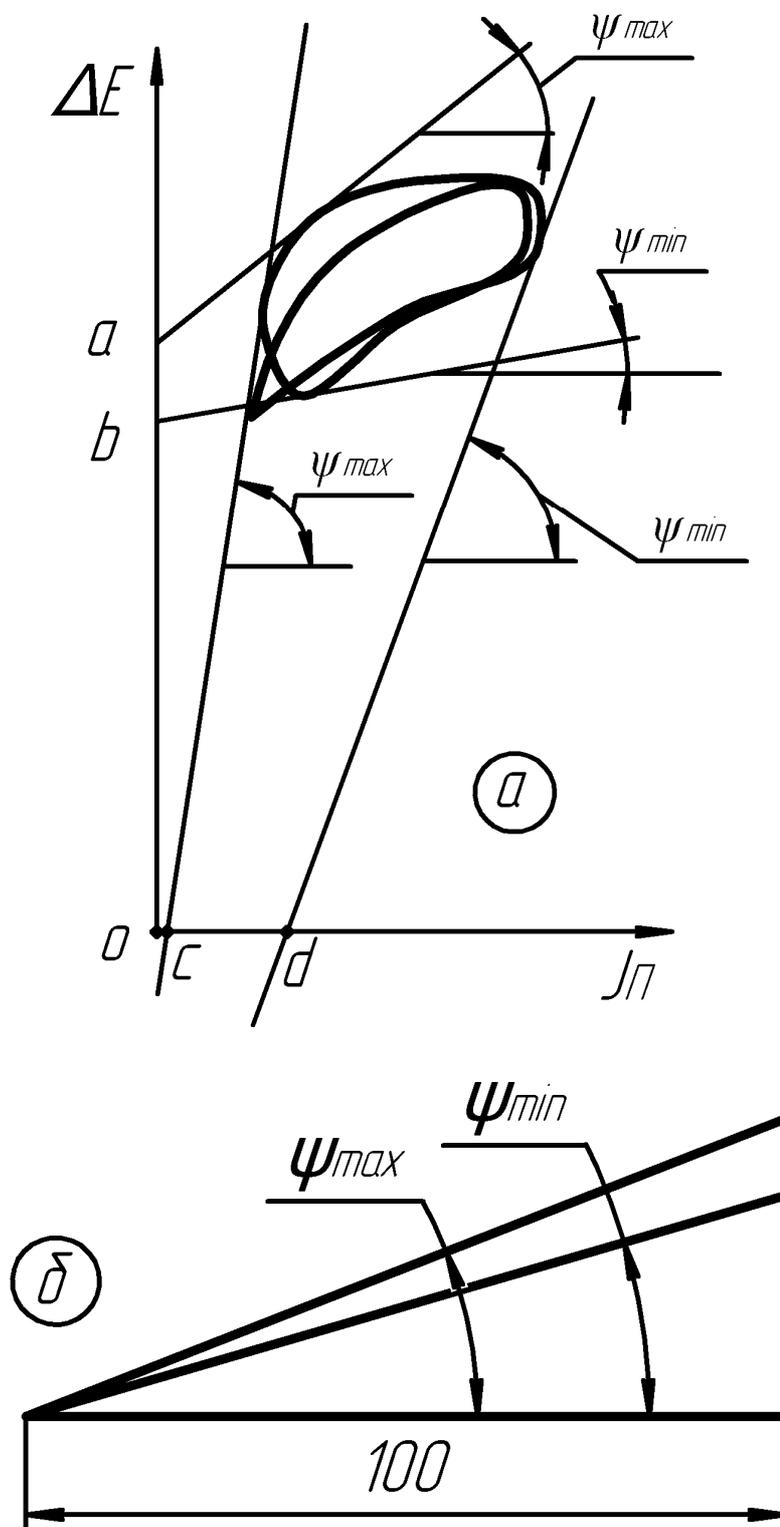


Рис. 3.6

С другой стороны, в натуральном виде величина  $I_O$  рассматриваемой конструкции состоит из следующих частей:

$$I_O = I_B + I_{перед.мех} + I_{РОТ} + I_M, \quad (3.23)$$

где  $I_B$  – момент инерции массы входного звена в сборе (вал, шестерни, муфты и т. д.);

$I_{перед.мех}$  – приведенный момент инерции масс звеньев, входящих в передаточный механизм, передающий движение от двигателя к входному звену;

$I_{РОТ}$  – приведенный момент инерции массы ротора двигателя к входному звену;

$I_M$  – момент инерции массы маховика относительно оси, проходящей через центр вращения входного звена.

Тогда из уравнения (3.23) можно вывести искомую величину:

$$I_M = I_O - I_B - I_{перед.мех} - I_{РОТ}. \quad (3.24)$$

Таким образом, задача расчета момента инерции массы махового колеса, обеспечивающего заданный коэффициент неравномерности  $\delta$ , решена.

В случае машины-двигателя заданными будут движущие силы или моменты. Порядок решения остается таким же, как и в отношении рабочей машины.

### 3.5. Метод Мерцалова

#### 3.5.1. Теоретическое обоснование метода

Общая кинетическая энергия машины может быть представлена как сумма:

$$E = E_M + E_n, \quad (3.25)$$

где  $E_M$  – кинетическая энергия махового колеса;

$E_n$  – кинетическая энергия приведенных масс машины, включая привод.

На основании уравнения (3.25) получаем очевидное равенство

$$\Delta E = \Delta E_M + \Delta E_n, \quad (3.26)$$

где  $\Delta E$ ,  $\Delta E_M$  и  $\Delta E_n$  – приращения кинетической энергии всей машины, махового колеса и машины без махового колеса соответственно, являющиеся функциями угла поворота входного звена.

Для определения момента инерции  $I_M$  нужно знать закон изменения величины  $\Delta E_M$ .

Из уравнения (3.26) следует:

$$\Delta E_M = \Delta E - \Delta E_n. \quad (3.27)$$

Приращение кинетической энергии  $\Delta E$  определяется так же, как и при применении метода энергомасс (см. п. 3.4.3).

Величина  $\Delta E_n$  определяется по формуле

$$\Delta E_n = E_n - E_{on} = 0,5(I_{ПП}\omega^2 - I_{0ПП}\omega_0^2), \quad (3.28)$$

где  $\omega_0$  – угловая скорость вала входного звена.

Определим  $I_{ПП}$  по формуле (3.17).

Будем считать, что  $I_{0ПП}$  и  $\omega_0$  – те же величины, соответствующие началу отсчета угла поворота ( $\varphi = 0$ ).

В данном методе принимается:

$$\omega = \omega_0 = \omega_{cp} = const. \quad (3.29)$$

Приближенное значение  $\Delta E_n$  определится по формуле

$$\Delta E_n^* = 0,5(I_{ПП} - I_{0ПП})\omega_{cp}^2. \quad (3.30)$$

На основании этих допущений формула (3.27) примет вид

$$\Delta E_M^* = \Delta E - 0,5(I_{ПП} - I_{0ПП})\omega_{cp}^2. \quad (3.31)$$

Пользуясь уравнением (3.31), строим диаграмму  $\Delta E_n^*(\varphi)$  (рис. 3.7, а) и вычитаем этот график из графика  $\Delta E(\varphi)$ . Получаем диаграмму  $\Delta E_M^*(\varphi)$  (рис. 3.7, б).

Для удобства графики  $\Delta E(\varphi)$  и  $\Delta E_n^*(\varphi)$  строятся в одних и тех же масштабах.

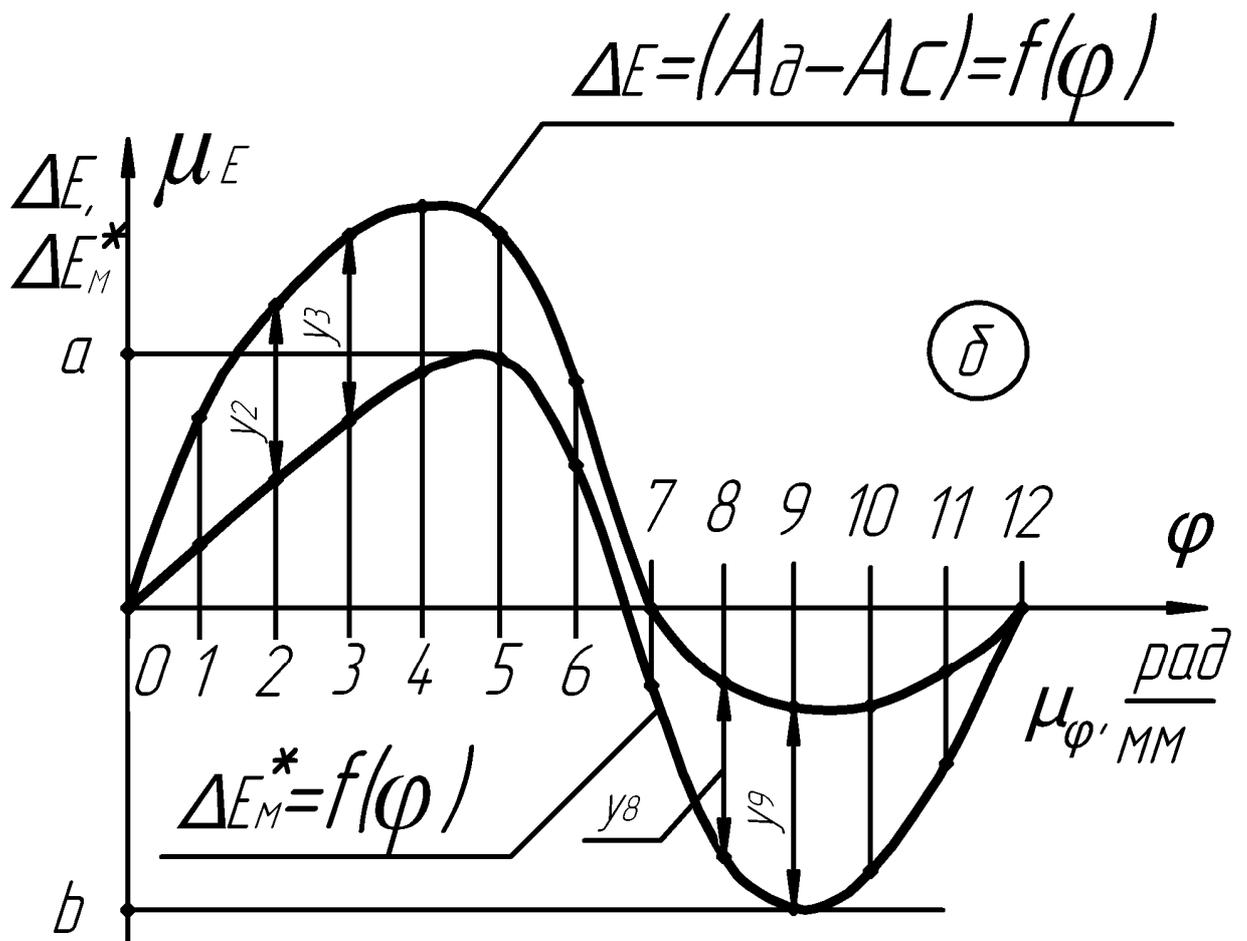
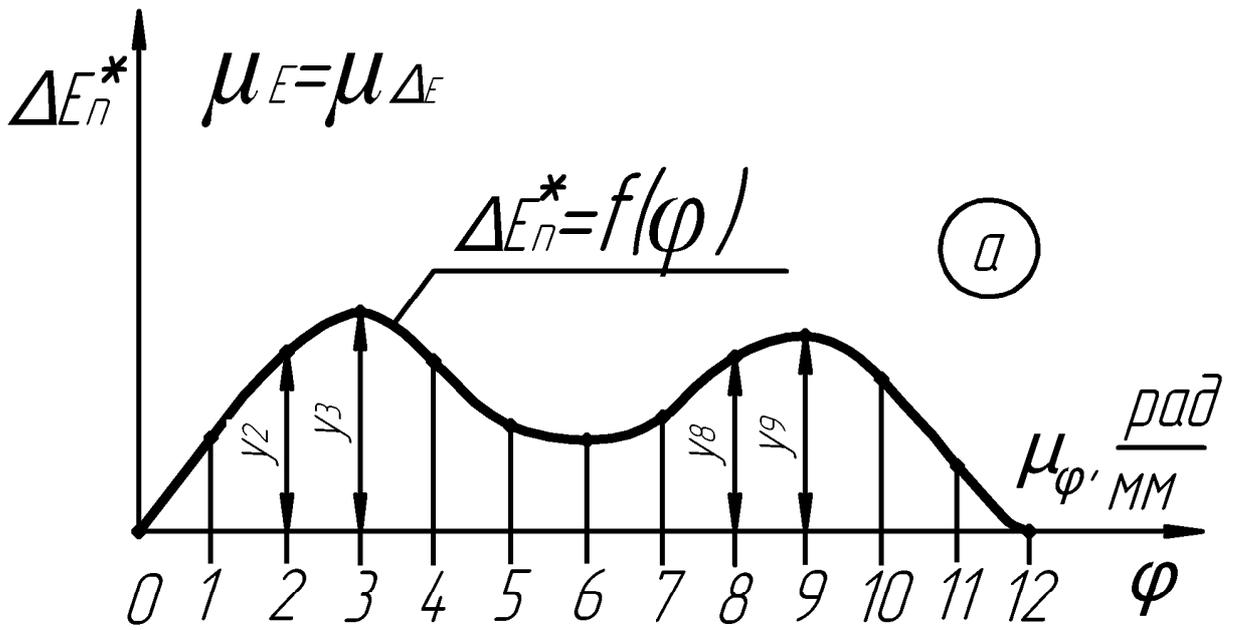


Рис. 3.7

Максимальное значение  $\Delta E_{M(\max)}^*$ :

$$\Delta E_{M(\max)}^* = E_{M(\max)} - E_{0M} = 0,5I_M (\omega_{\max}^2 - \omega_0^2), \quad (3.32)$$

где  $E_{M(\max)}$  – максимальная кинетическая энергия махового колеса;

$E_{0M}$  – кинетическая энергия в начале отсчета ( $\varphi = 0$ );

$\omega_{\max}$  – максимальная угловая скорость;

$\omega_0$  – начальная угловая скорость.

Минимальное значение  $\Delta E_{M(\min)}^*$ :

$$\Delta E_{M(\min)}^* = E_{M(\min)} - E_{0M} = 0,5I_M (\omega_{\min}^2 - \omega_0^2), \quad (3.33)$$

где  $E_{M(\min)}$  – минимальная кинетическая энергия маховика;

$\omega_{\min}$  – минимальная угловая скорость входного звена.

Вычитая (3.33) из (3.32) и учитывая (3.1) и (3.3), находим:

$$\Delta E_{M(\max)}^* - \Delta E_{M(\min)}^* = 0,5I_M (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2); \quad (3.34)$$

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = (\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min}); \quad (3.35)$$

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = \delta^* \omega_{cp}^* 2\omega_{cp}; \quad (3.36)$$

$$\Delta E_{M(\max)}^* - \Delta E_{M(\min)}^* = I_M \cdot \delta \cdot \omega_{cp}^2. \quad (3.37)$$

Другое выражение этой разности находится из графика  $\Delta E_M^*(\varphi)$ :

$$\Delta E_{M(\max)}^* - \Delta E_{M(\min)}^* = ab \cdot \mu_E. \quad (3.38)$$

Приравнивая (3.37) и (3.38), находим:

$$ab \cdot \mu_E = I_M \cdot \delta \cdot \omega_{cp}^2 \quad (3.39)$$

или

$$I_M = \frac{ab \cdot \mu_E}{\delta \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (3.40)$$

### 3.5.2. Порядок выполнения расчетов по методу Мерцалова

#### Случай А. Рабочая машина

Заданы силы сопротивления и силы тяжести звеньев. Приведенный момент движущих сил  $M_{\partial в}$  принимается постоянным.

1. Необходимо выполнить с 1-го по 4-й включительно пункты порядка расчета по методу энергомасс.

2. Используя уравнение (3.30), строим график  $\Delta E_n^*(\varphi)$ .

3. По уравнению (3.31), используя графики  $\Delta E(\varphi)$  и  $\Delta E_n^*(\varphi)$ , строим диаграмму  $\Delta E_M^*(\varphi)$  в том же масштабе, что и  $\Delta E(\varphi)$ . При вычитании ординат графиков необходимо учитывать знаки значений функций в каждом положении.

4. Проводятся две горизонтальные прямые, касающиеся кривой  $\Delta E_M^*(\varphi)$  в точках наибольшего ( $a$ ) максимума и наименьшего ( $b$ ) минимума. Найдем отрезок  $ab$  оси ординат, отсекаемый этими прямыми (см. рис. 3.7).

5. По формуле (3.40) находим приближенное значение  $I_M$ .

#### Случай Б. Машина-двигатель

Заданы движущие силы и силы веса звеньев. Приведенный момент всех сил сопротивления принимается постоянным.

Порядок расчета для этого случая соответствует случаю А.

### 3.6. Определение основных размеров махового колеса

На практике встречаются два типа конструкций маховика:

- 1) маховик в виде сплошного диска;
- 2) маховик в виде колеса со спицами, у которого основная его масса определена по ободу.

В случае первого типа махового колеса его момент инерции массы

$$I_M = 0,5 \cdot m \cdot R^2 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}, \quad (3.41)$$

где  $I_M$  – момент инерции махового колеса, определенный одним из ранее указанных способов;

$m$  – масса махового колеса, кг;

$R$  – внешний радиус махового колеса, м.

Так как

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \gamma, \quad (3.42)$$

то, подставляя в формулу  $I_M$ , получим

$$R = 4 \sqrt{\frac{2I_M}{\pi \cdot h \cdot \gamma}}, \quad (3.43)$$

где  $\gamma$  – удельная плотность материала диска;

$h$  – толщина диска, выбираемая из конструктивных соображений, м.

В случае второго типа момент инерции массы махового колеса, определенный по одному из методов, изложенных в настоящем пособии, распределяется на две части:

- 1) момент инерции массы обода;
- 2) момент инерции масс спиц втулки.

Обычно принимают, что момент инерции массы обода составляет 90 % от общего момента инерции массы махового колеса:

$$I_{OB} = 0,9 \cdot I_M. \quad (3.44)$$

Сечение обода махового колеса представлено на рисунке 3.8.

Соотношение его основных размеров можно принять [7]:

а) внешний радиус:  $R = 10b$ ; (3.45)

б) средний радиус:  $R_1 = 8b$ ; (3.46)

в) наименьший радиус:  $R_2 = 7b$ ; (3.47)

г) ширина обода:  $h = 4b$ ; (3.48)

д) диаметр вала:  $d = 2b$ ; (3.49)

е) диаметр ступицы:  $D = 4b$ ; (3.50)

ё) плотность материала маховика:  $\gamma = 7200 \text{ кг/м}^3$ ; (3.51)

ж) длина ступицы  $L$ : из конструктивных соображений.

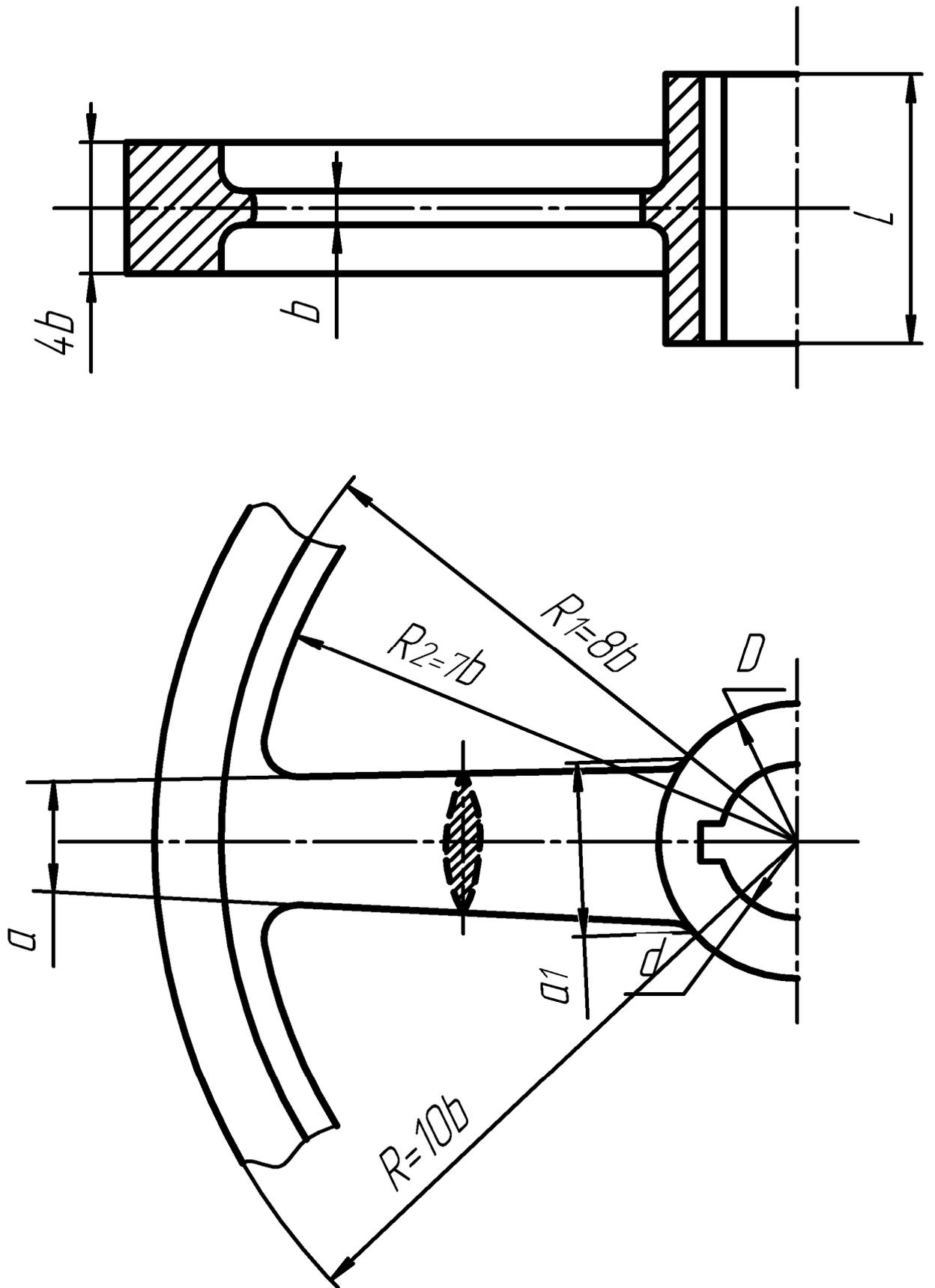


Рис. 3.8

Момент инерции массы обода можно представить как сумму моментов инерции двух колец:

$$I_M = 0,5m_1(R^2 + R_1^2) + 0,5m_2(R_1^2 + R_2^2); \quad (3.52)$$

$$I_M = 0,5 \cdot 4b\pi\gamma(R^2 + R_1^2)(R^2 - R_1^2)^2 + 0,5b\pi\gamma(R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2); \quad (3.53)$$

$$I_M = b\pi\gamma(2(R^4 - R_1^4) + 0,5(R_1^4 - R_2^4)). \quad (3.54)$$

Относительно  $b$  с учетом принятых размеров получим

$$b = 20\sqrt[5]{I_M} \text{ (мм)}. \quad (3.55)$$

При этом для соблюдения условия прочности вала маховика

$$2b \geq 3\sqrt{\frac{P_{yp} \cdot L_1}{0,2[\tau]}}, \quad (3.56)$$

где  $[\tau]$  – допустимый предел прочности материала вала при кручении; для углеродистой качественной стали:  $[\tau] = 20 \dots 35 \text{ Н/мм}^2$  [7];

$P_{yp}$  – среднее значение уравнивающей силы за цикл работы;

$L_1$  – длина кривошипа, мм.

В графической части проекта необходимо выполнить эскиз маховика с указанием его вычисленных размеров.

### 3.7. Выбор места установки маховика

Место установки маховика в машине может быть различным (рис. 3.9):

- 1) непосредственно на валу  $I$  входного звена механизма;
- 2) на одном из валов  $2$  привода между исполнительным механизмом и двигателем;
- 3) на валу  $3$  двигателя, соединенного с рабочей машиной передаточным механизмом.

В случае посадки на валу входного звена механизма момент инерции массы и габариты маховика получаются наибольшими, что нецелесообразно. Однако редуктор при таком варианте установки передает рабочей машине от

двигателя не полный момент, требуемый для преодоления пиковой нагрузки, а уменьшенный, выравненный действием маховика.

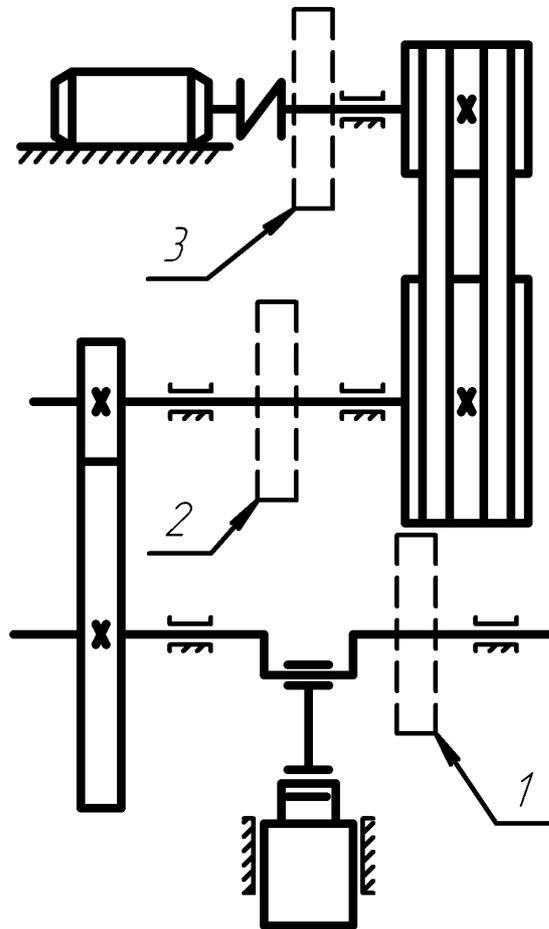


Рис. 3.9

Кроме того, напряжения в звеньях и кинематических парах привода, возникающие от неравномерности хода машины, будут соответственно снижены. С этой точки зрения, маховик целесообразно ставить ближе к источнику колебаний скорости периодического установившегося движения, т. е. ближе к входному звену исполнительного механизма.

При посадке маховика на другом валу  $i$ , имеющем  $\omega_i > \omega$  кривошипа, должно соблюдаться условие равенства кинетических энергий (при условии постоянства передаточного отношения):

$$0,5 \cdot J_{M_i} \omega_i^2 = 0,5 \cdot J_M \omega^2. \quad (3.57)$$

Из этого равенства следует, что момент инерции маховика на валу  $i$

$$J_{Mi} = J_M (\omega / \omega_i)^2. \quad (3.58)$$

Следовательно, при посадке маховика на быстроходном валу момент инерции его уменьшается обратно пропорционально квадрату передаточного отношения. Соответственно, меньше будут и габариты маховика.

Посадка маховика не на кривошипный вал, а на другой вал привода, вращающийся с большей скоростью, позволяет существенно уменьшить момент инерции, массу и габариты махового колеса. Этот вариант применяют при наличии надежного и долговечного передаточного механизма, выдерживающего резкие колебания нагрузки.

При посадке махового колеса следует учитывать жесткость кинематической цепи привода и сохранение постоянства передаточного отношения. Недостаточная жесткость системы (т. е. наличие упругой муфты, ременной передачи и т. п.) может вызвать в приводе такие упругие колебания, которые не позволят маховику выполнять его задачу в полной мере, и вышеизложенный расчет маховика становится неточным.

Наименьшие моменты инерции массы и габариты маховика можно получить при установке его на валу, соединенном непосредственно с валом двигателя упругой предохранительной муфтой.

В некоторых машинах полная нагрузка периодически меняется в значительных пределах. Поэтому установленный на валу машины маховик при уменьшении нагрузки накапливает кинетическую энергию, возвращая часть ее при увеличении нагрузки.

Таким образом, назначение маховика состоит не только в сохранении заданных пределов изменения величины угловой скорости звена приведения в установившемся движении машины, но и в аккумуляции им кинетической энергии и использовании ее для преодоления повышенных полезных нагрузок без повышения мощности двигателя.

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин [Текст]: учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 2009. – 639 с.: ил.
2. Теория механизмов и машин. Терминология [Текст]: учеб. пособие / Н. И. Левитский [и др.]; под ред. К. Ф. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 80 с.
3. Теория механизмов и машин [Текст]: учеб. для вузов / К. В. Фролов [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2008. – 496 с.: ил.
4. Кореняко, А. С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин [Текст] / А. С. Кореняко. – Киев: Вища шк., 2007. – 326 с.
5. Зиновьев, В. А. Курс теории механизмов и машин [Текст]: учеб. / В. А. Зиновьев. – М.: Наука, 1972.
6. Марголин, Ш. Ф. Теория механизмов и машин [Текст]: учеб. пособие / Ш. Ф. Марголин. – Минск: Высшейш. шк., 1968. – 358 с.: ил.
7. Чернин, И. М. Расчеты деталей машин [Текст]: справ. / И. М. Чернин, А. В. Кузьмин, Г. М. Ицкович. – Минск: Высшейш. шк., 1974. – 592 с.: ил.
8. Кухлинг, Х. Справочник по физике [Текст]: справ.: [пер. с нем.] / Х. Кухлинг. – 2-е изд. – М.: Мир, 1985. – 520 с.: ил.
9. Каримов, И. Теория механизмов и машин: электрон. курс [Электронный ресурс] / И. Каримов. – URL: <http://www.teormach.ru> (дата обращения: 01.02.2017).

*Учебное издание*

*Тувин Александр Алексеевич  
Смирнов Александр Николаевич  
Бонокин Владимир Васильевич  
Шляпугин Роман Владимирович  
Пирогов Дмитрий Андреевич  
Селезнев Сергей Валентинович*

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

Редактор *О. Р. Ростов*

Подписано в печать 01.06.2017. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ . Трафаретная печать.  
Уч.-изд. л. 6,51. Усл. печ. л. 3,0. Тираж 50 экз.

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный политехнический университет»  
Издательский центр ДИВТ  
153000, г. Иваново, Шереметевский проспект, 21