Тема 1.2 Частная теория относительности

Ранее было введено понятие инерциальных систем отсчета, в которых выполняются законы Ньютона. Оказалось, что инерциальных систем отсчета существует бесчисленное множество.

Покажем, что любая система, движущаяся относительно инерциальной с постоянной по величине и направлению скоростью, тоже является инерциальной. Для этого рассмотрим две системы отсчета:

K – неподвижная инерциальная система отсчета;

K' – система, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью $\vec{u}$ вдоль оси x.

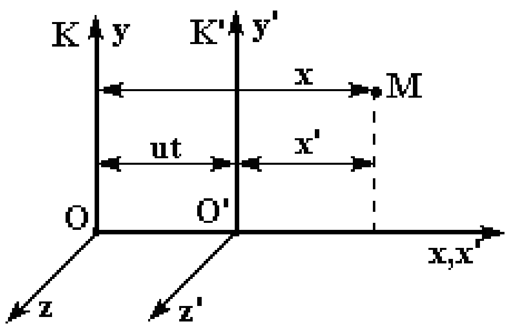

Рис. 2.1

Выберем некоторую точку M и обозначим:

x, y, z – координаты т. M в системе K, x', y', z' – координаты т. M в системе K'.

Выразим координаты этой точки в движущейся системе отсчета через ее координаты в неподвижной системе, предполагая, что в начальный момент времени точки O и O' совпадали. Из рис. 2.1 видно, что:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) называют соотношениями Галилея. Продифференцируем (2.1) по времени:

$$v'_x = v_x - u,$$
$$v'_y = v_y, \qquad (2.2)$$
$$v'_z = v_z.$$

Запишем (2.2) в векторной форме:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}. \qquad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) называются **классическим законом сложения скоростей.**

Продифференцируем по времени (2.3):

$$\vec{a}' = \vec{a}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, ускорение тела по отношению к различным инерциальным системам отсчета одинаково.

Поэтому если система K инерциальна (в отсутствие внешних воздействий на т. M ее ускорение $\vec{a}$ равно нулю), то и система K' тоже является инерциальной ($\vec{a}' = \vec{a} = 0$).

Из (2.4) следует, что силы, действующие на тело, одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. В самом деле, $\vec{F} = m\vec{a} = m$

$\vec{a}' = \vec{F}'$. Это значит, что во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково, а законы Ньютона не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Говорят, что законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

Сформулируем теперь **механический принцип относительности** или **принцип относительности Галилея:** никакими механическими опытами, проведенными в замкнутой системе отсчета, нельзя установить, движется эта система прямолинейно и равномерно или покоится.

Постулаты специальной теории относительности

Современная физическая теория пространства и времени составляет раздел физики, называемый **специальной теорией относительности (СТО).**

В основе этой теории, созданной в 1905 г. А. Эйнштейном для инерциальных систем отсчета, лежат два постулата, вытекающие из опытных данных:

1) ***принцип относительности*:**

   никакими опытами (механическими, электрическими, магнитными, оптическими и т.д.), проведенными в замкнутой системе отсчета, нельзя установить, движется эта система прямолинейно и равномерно или покоится;

2) ***принцип постоянства скорости света:***

   свет в любой инерциальной системе отсчета распространяется с одной и той же скоростью, независимо от того, испущен он движущимся или неподвижным источником.

Эти постулаты относятся к фундаментальным законам природы, область их применения до настоящего времени является всеобъемлющей. Рассмотрим выводы, вытекающие из этих постулатов.

Преобразования Лоренца

Из постулатов СТО вытекают новые формулы для преобразования координат и времени. Эти формулы получили название преобразований Лоренца. Запишем преобразования Лоренца для частного случая двух инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ вдоль оси x:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.5}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть скорость v гораздо меньше скорости света c в вакууме.

Если v<<c, то $\frac{v}{c} << 1$, $\frac{v^2}{c^2} << 1$ и из (2.5) получим преобразование Галилея (2.1):

$$x' = x - vt; \; y' = y; \; z' = z; \; t' = t.$$

Следовательно, преобразования Галилея верны только для случая малых скоростей и являются частным случаем преобразований Лоренца.

2) Пусть v>c. В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми сколь угодно большими скоростями. Из преобразований Лоренца следует, что при v>c $1-\frac{v^2}{c^2}<0$ и $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ становится мнимым, а координаты и время теряют физический смысл.

Таким образом, скорость света в вакууме является предельной скоростью распространения взаимодействий в природе.

Следствия из преобразований Лоренца

Масштаб в различных инерциальных системах отсчета

Рассмотрим две системы отсчета: Oxyz – неподвижная инерциальная система и O'x'y'z' – система отсчета, движущаяся относительно первой со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ вдоль оси x (рис. 2.2).

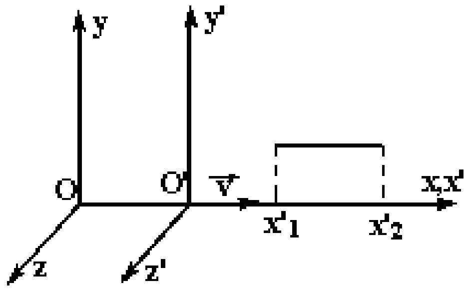

Рис. 2.2

Пусть стержень, расположенный параллельно оси x, покоится в системе отсчета O'x'y'z'.

Для определения его длины надо отметить координаты концов стержня:

$\ell_0 = x'_2 - x'_1$- длина покоящегося стержня.

В системе Oxyz стержень движется со скоростью $\vec{v}$. Для определения его длины надо отметить координаты концов стержня в один и тот же момент времени $t_1 = t_2$ по часам системы Oxyz**:** $\ell = x_2 - x_1$ - длина движущегося стержня.

Выразим координаты x_1' и x_2' концов стержня с помощью преобразований Лоренца:

$$\ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (2.7)$$

Из (2.7) видно, что $\ell < \ell_0$, т.е. длина тела наименьшая в той системе, по отношению к которой тело покоится. Размеры тела в направлении осей y и z не меняются.

Сокращение длины движущегося тела в направлении движения называется релятивистским сокращением. Оно становится заметным при скоростях, близких к скорости света. Такие скорости называются релятивистскими.

Промежуток времени между двумя событиями в различных инерциальных системах отсчета

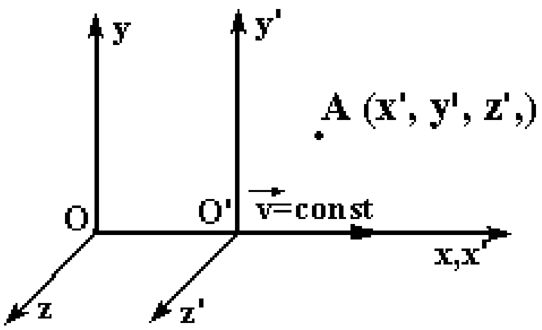

Рис. 2.3

Пусть в т. A, неподвижной в системе отсчета O'x'y'z', произошло какое-то событие. Сравним промежуток времени между двумя событиями в системах отсчета Oxyz и O'x'y'z' (рис. 2.3).

В системе O'x'y'z' т. A покоится, начало и конец события происходят в одной точке пространства и могут быть отмечены по одним и тем же часам:

$\Delta t_0 = t_2' - t_1'$ - промежуток времени между двумя событиями в системе O'x'y'z'.

По отношению к системе Oxyz т. A движется, начало события происходит в т.x_1, а конец в т.x_2, причем

$$x_2 - x_1 = v\Delta t, \tag{2.8}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ - промежуток времени между двумя событиями в системе Oxyz.

Моменты начала t_1 и конца t_2 события должны быть отмечены по синхронизированным часам системы Oxyz, находящимся в точках x_1 и x_2. Воспользуемся преобразованиями Лоренца:

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{x_2 v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{x_1 v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{t_2 - t_1 - \frac{v^2}{c^2}\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(t_2 - t_1\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

откуда получим:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что $\Delta t_0 < \Delta t$, то есть промежуток времени между двумя событиями наименьший в той системе, по отношению к которой т. А покоится. Это значит, что процессы в движущейся системе протекают медленнее, чем в неподвижной, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Релятивистский закон сложения скоростей

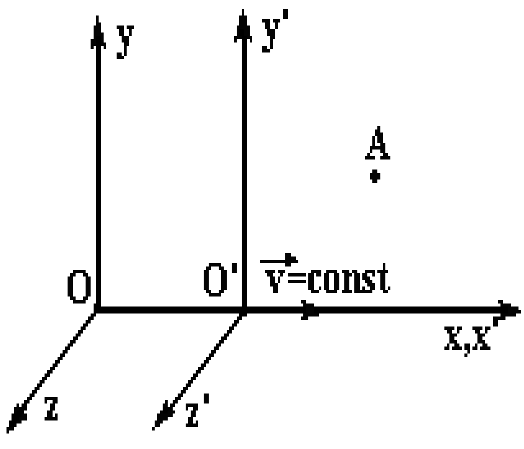

Рис. 2.4

Обозначим: $\vec{u}$ - скорость некоторой т. А в системе отсчета Oxyz; $\vec{u}'$ - скорость той же точки в системе отсчета O'x'y'z', движущейся вдоль оси x со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ (рис. 2.4).

Как известно, $$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

(2.10)

и

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \tag{2.11}$$

Из преобразований Лоренца найдем:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

(2.12)

Разделив первые три равенства (2.12) на четвертое и используя (2.10) и (2.11), после несложных преобразований получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}},$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \tag{2.13}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x v}{c^2}}, \tag{2.14}$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}, \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_x v}{c^2}}.$$

Легко видеть, что при $v \ll c$ и $u \ll c$ релятивистский закон сложения скоростей переходит в классический.

Интервал

Всякое событие происходит в пространстве и во времени и характеризуется тремя пространственными координатами x,y,z и одной временной координатой t. Поэтому для изучения динамики различных процессов часто пользуются воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладывают координаты x,y,z и время t (четырехмерный мир Минковского).

Рассмотрим в четырехмерном пространстве два события: первое имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1, второе – x_2, y_2, z_2, t_2. Величину

$$S = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \qquad (2.15)$$

называют **интервалом между событиями или пространственно-временным интервалом.**

Покажем, что интервал между двумя данными событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Для этого запишем (2.15) в двух инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга со скоростью $\vec{v} = \mathrm{const}$, в следующем виде:

$$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \qquad (2.16)$$

и

$$\Delta S'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 . \qquad (2.17)$$

Из преобразований Лоренца следует, что

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2.18)$$

Подставим (2.18) в (2.17) и после несложных преобразований получим:

$$\Delta S' = \Delta S \quad \text{или} \quad S = S'. \qquad (2.19)$$

Понятие интервала устанавливает связь между пространственными и временными координатами событий. Как следует из (2.19), величина интервала не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Этот вывод вытекает из условия, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах. Поэтому (2.19) представляет собой математическое выражение постулата о постоянстве скорости света.

Собственное время

Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с данным объектом, **называется собственным временем объекта**. Собственное время принято обозначать через τ или $\Delta\tau$. Получим выражение для собственного времени $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (2.20)$$

Покажем, что собственное время инвариантно относительно преобразований Лоренца, то есть одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Свяжем с инерциальной системой отсчета часы. Так как часы покоятся в этой системе, то

$$\Delta x = 0; \quad \Delta y = 0; \quad \Delta z = 0$$

и интервал между событиями в этой системе

$$\Delta S^2 = c^2\Delta\tau^2, \qquad \text{(срав. с (2.16))}$$

а собственное время

$$\Delta\tau = \frac{\Delta S}{c}. \qquad (2.21)$$

Выше было показано, что ΔS и c одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, поэтому $\Delta\tau$ также является инвариантом.

Элементы релятивистской динамики

Релятивистский импульс

Ранее была установлена инвариантность законов Ньютона, а следовательно, и вытекающего из них закона сохранения импульса относительно преобразований Галилея. Однако инвариантность этих законов по отношению к преобразованиям Лоренца не соблюдается.

В СТО найдено новое выражение для импульса частицы, такое, что выполняются условия: 1) закон сохранения импульса остается инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца как при больших, так и при малых скоростях и 2) при $v \ll c$ остается справедливым ньютоновское определение импульса.

Рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ относительно неподвижной инерциальной системы отсчета; $d\vec{r}$ - вектор перемещения частицы за время dt. Умножим $d\vec{r}$ на постоянную величину $\frac{m_0}{d\tau}$, где $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ - собственное время частицы, m_0 - некоторая постоянная:

$$d\vec{r}\cdot\frac{m_0}{d\tau} = \frac{m_0 d\vec{r}}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.22}$$

Допустим, что $v \ll c$, так что $\frac{v^2}{c^2}$ можно пренебречь, и возьмем в качестве m_0 массу частицы, как она определяется в классической механике. При этих условиях $\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ перейдет в m_0 $\vec{v}$. В классической механике этот вектор, как известно, называют импульсом частицы. Поэтому в релятивистской механике естественно импульс определить выражением

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}. \tag{2.23}$$

Величина
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
(2.24)

называется **массой движущегося тела или релятивистской массой**. Из (2.24) следует, что при $v = 0$ $m = m_0$; m_0 называется **массой покоя**. Она не зависит от скорости тела и является инвариантной величиной.

Уравнение движения релятивистской частицы

Записывая второй закон Ньютона в виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

и подставляя в него релятивистский импульс, получим уравнение движения релятивистской частицы:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.25}$$

Второй закон Ньютона оказывается инвариантным относительно преобразований Лоренца, если под импульсом понимать вектор $\vec{p}$, равный

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot$$

Закон взаимосвязи массы и энергии

Как известно, элементарная работа силы $dA = \vec{F} d\vec{r}$ равна приращению кинетической энергии частицы:

$$dT = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt . \tag{2.26}$$

Подставим в (2.26) $\vec{F}$ из (2.25):

$$dT = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} dt \cdot$$

Выполним дифференцирование и после несложных преобразований получим:

$$dT = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \tag{2.27}$$

Найдем дифференциал выражения (2.24):

$$dm = \frac{m_0 \frac{v}{c^2} dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.28}$$

и сравним (2.27) и (2.28). Из сравнения видно, что

$$dT = c^2 dm . \tag{2.29}$$

Интегрирование этого соотношения в пределах от m_0 (если $v = 0$, $m = m_0$ и кинетическая энергия равна нулю) до m дает:

$$T = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0c^2. \qquad (2.30)$$

Преобразуем (2.30) с учетом (2.24):

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (2.31)$$

Мы получили выражение для кинетической энергии в СТО.

В случае малых скоростей $v \ll c$ выражение (2.31) можно преобразовать следующим образом:

$$T = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2},$$

то есть мы пришли к классическому выражению кинетической энергии частицы.

Из формулы $dT = c^2 dm$ следует, что приращение кинетической энергии частицы сопровождается пропорциональным приращением ее релятивистской массы. Однако при протекании различных процессов в природе одни виды энергии переходят в другие, поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать при любом увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит, т.е.

$$c^2 dm = dE$$

и

$$E = \int_0^m c^2 dm = mc^2, \qquad (2.32)$$

где E - полная энергия тела.

Таким образом, А. Эйнштейн пришел к фундаментальному выводу: *полная энергия тела и его релятивистская масса всегда пропорциональны друг другу.*

Этот закон носит название **закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии.** Он объединяет закон сохранения массы и закон сохранения энергии в **единый закон сохранения массы и энергии**.

Связь энергии и импульса

Соотношение $E = mc^2$ возведем в квадрат и представим в виде суммы двух слагаемых:

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + m^2v^2c^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2. \qquad (2.33)$$

Из (2.33) получим:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} \qquad (2.34)$$

или

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(E + E_0)(E - E_0)}. \qquad (2.35)$$

Так как $T = E - E_0$ (см. формулу (2.30)), то

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(E_0 + T + E_0)T} = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2E_0)}\ . \qquad (2.36)$$

Из формул

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{и} \qquad E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

легко получить еще одно соотношение, связывающее энергию и импульс частицы в релятивистской механике:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}\,. \qquad (2.37)$$

Инварианты преобразования

При изучении СТО мы установили существование целого ряда инвариантных величин, т.е. величин, не меняющихся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Перечислим их:

1) скорость света в вакууме (c);
2) интервал между событиями: $\Delta S = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$;
3) собственное время τ системы;
4) масса покоя m_0.

Покажем, что существует еще один инвариант $\frac{E^2}{c^2} - p^2$. Из соотношения (2.33) следует, что

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2,$$

откуда

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 = inv\,, \qquad (2.38)$$

так как масса покоя и скорость света инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Из (2.38) следует, что в СТО все законы сохранения энергии и импульса перестают быть независимыми, а объединяются в единый закон сохранения импульса-энергии.