Тема **7**

Механические колебания и волны.

Основные рабочие формулы

Уравнения колебаний гармонического осциллятора

$$\mathbf{x = A\sin(\omega t + \alpha)}$$
$$\mathbf{x = A\cos(\omega t + \alpha)}$$

Скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$ при гармонических колебаниях равны соответственно:

$$\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)}$$

$$\mathbf{a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)}$$

Уравнение затухающих колебаний:

$$\mathbf{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)} \;;$$

период затухающих колебаний:

$$\mathbf{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$

логарифмическим декрементом затухания:

$$\mathbf{\delta = \ln\frac{A_t}{A_{(t+T)}}}$$

$$\mathbf{\delta = \beta T = \frac{r}{2\beta}T} \;.$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний равна:

$$\mathbf{A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}} \;,$$

а начальная фаза определяется из соотношения:

$$\mathbf{tg\alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

Уравнение плоской волны

$$\xi = A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \alpha\right];$$

Длина волны

$$\lambda = vT.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Точка совершает гармонические колебания с частотой ν=10 гц. В момент, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение: x_{max} = 1 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Решение. Уравнение колебаний точки можно записать в виде:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \qquad (1)$$

где A – амплитуда колебаний; ω - циклическая частота; t – время; φ_1 - начальная фаза.

По определению амплитуда колебаний

$$A = x_{max}. \qquad (2)$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (3)$$

Для момента времени t = 0 формула (1) примет вид:

$$x_{max} = A\sin\varphi_1,$$

откуда начальная фаза

$$\varphi_1 = \arcsin(x_{max}/A) = \arcsin 1$$

или

$$\varphi_1 = (2k+1)\pi/2 \quad (k = 0,1,2\ldots).$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояния колеблющейся точки, поэтому можно принять

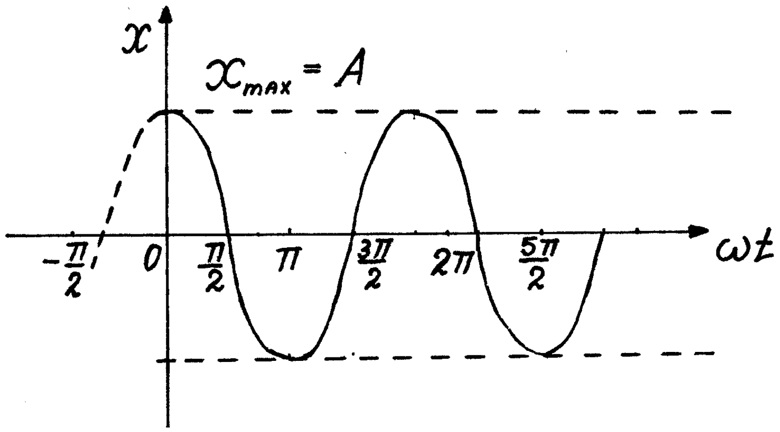
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

С учётом равенств (2) – (4) уравнение колебаний примет вид:

$$x = A\sin(2\pi\nu t + \varphi_1), \text{ или } x = A\cos 2\pi\nu t,$$

где A =1 мм = 10^{-3} м, ν = 10 Гц, $\varphi = \pi/2$.

График соответствующего гармонического колебания приведён на рисунке



Задача 2. Частица массой m = 0,01 кг совершает гармонические колебания с периодом T = 1 с. Полная энергия колеблющейся частицы E = 0,1мДж. Определите амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

где $\omega = 2\pi/T$. Отсюда амплитуда:

$$A = \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (1)$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на неё, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -kx$, где k – коэффициент квазиупругой силы; x – смещение колеблющейся точки. Максимальной сила будет при максимальном смещении x_{max}, равном амплитуде:

$$F_{max} = kA. \qquad (2)$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2/T^2. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в (2) и произведя упрощения, получим:

$$F_{max} = 2\pi\sqrt{2mE}/T.$$

Произведём вычисления:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}}\ \text{м} = 0{,}045\ \text{м} = 45\ \text{мм};$$

$$F_{max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}}\ \text{Н} = 4{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} = 4{,}44\ \text{мН}.$$

Задача 3. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$. Найдите длину волны λ и смещение указанных точек в момент t = 1,2 с, если амплитуда колебаний A = 0,1 м. Напишите уравнение волны.

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2π; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз, равной:

$$\Delta\varphi - \Delta x \cdot 2\pi/\lambda = (x_2 - x_1) \cdot 2\pi/\lambda.$$

Решая это равенство относительно λ, получаем:

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \tag{1}$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (1), и выполнив арифметические действия, получим:

$$\lambda = \frac{2\pi(15 - 12)}{0{,}75\pi}\ \text{м} = 8\ \text{м}.$$

Для того, чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую частоту ω. Так как $\omega = 2\pi/T$ ($T = \lambda/v$ - период колебаний), то

$$\omega = \frac{2\pi \cdot v}{\lambda}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8}\ \text{с}^{-1} = 5\pi\ \text{с}^{-1}.$$

Зная амплитуду A колебаний, циклическую частоту и скорость v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$y = A\cos\omega(t - x/v), \tag{2}$$

где A = 0,1м, $\omega = 5\pi\ \text{с}^{-1}$, 20 м/с.

Чтобы найти смещение y указанных точек, достаточно в уравнение (2) подставить значения t и x:

$$y_1 = 0{,}1\cos 5\pi(1{,}2 - 12/20)\ \text{м} = 0{,}1\cos 3\pi\ \text{м} = -0{,}1\ \text{м};$$

$$y_2 =$$

$$0{,}1\cos 5\pi(1{,}2 - 15/20)\ \text{м} = 0{,}1\cos 2{,}25\pi\ \text{м} = 0{,}1\cos 0{,}25\pi\ \text{м} =$$

$$= 0{,}071\ \text{м} = 7{,}1\ \text{см}.$$

Индивидуальные задания. Колебания и волны

Задание 1

1. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см, $\omega = 2\ с^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила F достигла значения $+5$ мН, потенциальная энергия E_p точки стала равной 0,1 мДж. Найдите этот момент времени и соответствующую фазу колебания.
2. Пружинный маятник массой $m = 100$ г совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 2\cdot10^{-2}$ кг/с. Определите коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН, а коэффициент жесткости пружины маятника $k = 10$ Н/м.
3. Частица массой $m = 0{,}01$ кг совершает гармонические колебания с периодом $T = 2$ с. Полная энергия колеблющейся частицы $E = 0{,}1$ мДж. Определите наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.
4. Дифференциальные уравнения двух затухающих колебаний имеют вид:

   $0{,}01x'' + 10^{-3}x' + 0{,}09x = 0,$

   $0{,}02x'' + 5\cdot10^{-3}x' + 0{,}2x = 0.$

   Найдите коэффициенты затухания β_1 и β_2 и логарифмические декременты затухания δ_1 и δ_2 и сравните их.
5. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5\ с^{-1}$. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определите:

   1) скорость v точки в момент времени, когда смещение $x = 1{,}5$ см,

   2) максимальную силу F_{max}, действующую на точку,

   3) полную энергию колеблющейся точки.
6. Измерениями установлено, что логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой $100\ с^{-1}$, равен 0,002. Через какой промежуток времени амплитуда колебаний возбужденного камертона уменьшится в 100 раз? Как изменится при этом полная энергия колебаний?
7. Груз массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенный на пружине, коэффициент упругости которой $k = 5$ Н/м, помещен в масло. Коэффициент трения в масле $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, меняющаяся по закону $F = 0{,}1\sin\omega t$ (Н). При какой частоте вынуждающей

силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной? Чему равна максимальная амплитуда?

8. Математический маятник массой $m = 2$ кг совершает гармонические колебания, амплитуда которых $A = 0,1$ м. Максимальная кинетическая энергия колеблющегося тела $E_{k\,max} = 10^{-3}$ Дж. Найдите период колебаний и длину маятника. Напишите уравнение колебаний маятника, если начальная фаза колебаний равна $\pi/3$.

9. Гиря массой $m = 500$ г подвешена к спиральной пружине жесткостью $k = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания $\delta = 0,004$. Определите число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. За какой промежуток времени произойдет это уменьшение?

10. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $E = 3 \cdot 10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на точку действует сила $F = 2,25 \cdot 10^{-5}$ Н?

11. За время $t = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний математического маятника длиной $\ell = 1$ м уменьшилась в три раза. Определите коэффициент затухания, напишите дифференциональное уравнение колебаний маятника.

12. Материальная точка массой $m = 0,01$ кг совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид: $x = 0,2\sin 8\pi t$ (см). Найдите возвращающую силу F в момент времени $t = 0,1$ с, а также полную энергию E точки.

13. Амплитуда колебаний маятника длиной $\ell = 1$ м за время $t = 10$ с уменьшилась в два раза. Определите логарифмический декремент затухания, запишите дифференциальное уравнение колебаний маятника.

14. Тело массой $m = 0,05$ кг, подвешенное на пружине, совершает колебания с амплитудой $A = 5$ см. Максимальная скорость колебаний $v_{max} = 5$ м/с. Найдите коэффициент упругости пружины и максимальную потенциальную энергию тела.

15. Начальная амплитуда колебаний маятника 3 см. Через 10 с она равна 1 см. Через сколько времени амплитуда будет равна 0,3 см?

16. Каков логарифмический декремент затухания математического маятника длиной $\ell = 0,8$ м, если его начальная амплитуда 5°, а через промежуток времени $\Delta t = 5$ мин амплитуда становится равной 0,5°?

17. К спиральной пружине жесткостью $k = 10$ Н/м подвесили грузик массой

$m = 10$ г и погрузили систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления $r = 0,1$ кг/с. Определите: 1) частоту ν_0 собственных колебаний системы; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$, если вынуждающая сила меняется по гармоническому закону с амплитудой $F_0 = 0,02$ Н.

18. Найдите добротность математического маятника длины ℓ = 50 см, если за промежуток времени τ = 5,2 мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз (добротность $Q = \pi/\delta$, где δ – логарифмический декремент затухания).

19. Шарик массой m = 60 г колеблется с периодом T = 2 с. В начальный момент времени смещение шарика от положения равновесия x_0 = 13 см и он обладает энергией E = 0,02 Дж. Запишите уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

20. Второй закон Ньютона для колебаний гармонического осциллятора имеет вид:

$$0{,}05\,x'' + 2x' + 9x = 0$$

(все величины выражены в СИ).

Найдите:

– массу m осциллятора,

– циклическую частоту ω_0 собственных колебаний осциллятора,

– коэффициент затухания β,

– логарифмический декремент затухания δ.

21. Гармонический осциллятор колеблется по закону $x = 5\cos 2t$ (см). Определите ускорение осциллятора в тот момент, когда его скорость равна v = 8 см/с.

22. Уравнение затухающих колебаний материальной точки имеет вид:

$$x = 0{,}05e^{-0{,}01t}\cos(\pi/4 \cdot t + \pi/2)\ (\text{м}).$$

Найдите логарифмический декремент затухания колебаний.

23. Материальная точка совершает простые гармонические колебания так, что в начальный момент времени смешение точки равно x_0 = 10 см/с. Определите амплитуду и начальную фазу колебаний точки, если их период T = 2 с.

24. Математический маятник длиной ℓ совершает затухающие колебания, такие, что за время τ амплитуда колебаний уменьшается в n раз. Запишите дифференциальное уравнение колебаний маятника.

25. Материальная точка массой m = 0,1 г колеблется согласно уравнению $x = 5 \cdot \sin 20t$ (см). Определите максимальное значение возвращающей силы и кинетическую энергию точки.

Задание 2

1. Уравнение бегущей волны имеет вид:

$$\xi = 600\cos(1800t - 5{,}3x),$$

где ξ – в микрометрах, t – секундах, x – в метрах. Найдите: 1) отношение амплитуды колебаний частиц среды к длине волны и 2) скорость распространения волны.

2. Определите скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии Δx = 15 см, равна $\pi/2$. Частота колебаний ν =25 Гц.

3. Определите период колебаний однородного шара около горизонтальной оси, проходящей через точку, отстоящую от центра шара на расстоянии 0,3 радиуса шара. Радиус шара равен 6 см.

4. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет вид:

$\xi = 0{,}01\cos(10^3 t - 2x)$ (м).

Найдите:

– скорость распространения волны;

– длину волны;

– период колебаний частиц среды.

5. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Период колебаний точек шнура $T = 1{,}2$ с. Определите разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ см и $x_2 = 30$ см.

6. Диск радиусом $R = 24$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определите приведенную длину и период колебаний такого маятника.

7. Две точки находятся на прямой, вдоль которой распространяются волны со скоростью $v = 50$ м/с. Период колебаний $T = 0{,}05$ с, расстояние между точками $\Delta x = 0{,}5$ м. Найдите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний этих точек.

8. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на 2 м от источника. Частота колебаний $\nu = 5$ Гц, скорость распространения волн $v = 40$ м/с.

9. Вдоль упругого шнура распространяется поперечная волна со скоростью $v = 25$ м/с. Период колебаний частиц шнура $T = 1$ с, амплитуда $A = 2$ см. Определите: 1) длину волны; 2) смещение ξ, скорость u и ускорение a точки, отстоящей на расстоянии 50 см от источника волн в момент времени $t = 4$ с .

10. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью $v = 20$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1 = 12$ м и $x_2 = 15$ м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$. Найдите длину волны λ, напишите уравнение волны, если амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ м.

11. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет вид:

$\xi = 0{,}2\cos(100\pi t - 20\pi x)$ (см).

Найдите: 1) длину волны λ; 2) фазовую скорость распространения волны.

12. Волны с периодом колебаний $T = 1{,}2$ с и амплитудой $A = 2$ см распространяются со скоростью $v = 15$ м/с. Чему равно смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $x = 45$ см от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t = 4$ с?

13. Однородный стержень длиной ℓ = 120 см совершает малые колебания около горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, перпендикулярно плоскости, в которой совершаются колебания. Найдите период колебаний стержня и его приведенную длину.

14. Напишите уравнение плоской волны, распространяющейся по оси x, если амплитудное значение скорости колебаний частиц среды U_{max} = 31,4 см/с, период колебаний T = 0,02 с, фазовая скорость волны v = 50 м/с.

15. На концах тонкого стержня длиной ℓ = 30 см укреплены одинаковые грузики. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости колебаний стержня и проходящей через точку, удаленную на расстояние d = 10 см от одного из его концов. Пренебрегая массой стержня, найдите приведенную длину L и период колебаний T физического маятника.

16. Волны распространяются в упругой среде со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы которых противо – положны, равно 1 м. Определите частоту колебаний.

17. Уравнение незатухающих колебаний дано в виде $\xi = 4 \sin 600\pi t$ (см). Найдите смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 75 см от источника колебаний, через 0,01 с после начала колебаний. Скорость распространения волны 300 м/с.

18. Тонкий обруч, подвешенный на гвозде, вбитом перпендикулярно в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R = 30 см. Вычислите период колебаний такого физического маятника.

19. Найдите смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $x = \lambda/12$, для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний A = 0,05 м (λ – длина волны, T – период колебаний).

20. От источника колебаний распространяются волны вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний A = 10 см. Как велико смещение от положения равновесия точки, удаленной от источника на 3/4 длины волны в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время t = 0,9 T (T – период колебаний) ?

21. Найдите разность фаз колебаний двух точек, находящихся на расстоянии соответственно 10 м и 16 м от источника колебаний. Период колебаний 0,04 с и скорость распространения волны 300 м/с.

22. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 4 см от источника колебаний в момент времени $t = T/6$, равно половине амплитуды (T – период колебаний). Найдите длину бегущей волны.

23. На стержне длиной ℓ = 20 см укреплены два одинаковых грузика: один в середине стержня, другой на одном из его концов. Стержень с грузиком колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости колебаний стержня и проходящей через свободный конец стержня. Определите приведенную длину L и период колебаний T такого физического маятника. Массой стержня можно пренебречь.

24. Уравнение незатухающих колебаний источника дано в виде $\xi = \sin 2{,}5\pi t$ (см). Найдите смещение от положения равновесия, скорость и

ускорение точки, находящейся на расстоянии 20 м от источника колебаний, для момента времени $t = 1$ с после начала колебаний. Фазовая скорость распространения волны равна 100 м/с.

25. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найдите: 1) скорость распространения колебаний; 2) максимальную скорость колебаний частиц воздуха.