Тема 3.1. Электрическое поле в вакууме

Электрические заряды

Электростатика – это учение о покоящихся электрических зарядах и связанных с ними электростатических полях.

Основным понятием электростатики является электрический заряд. Согласно современным представлениям, под электрическим зарядом понимается физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитных взаимодействий.

Отметим основные свойства заряда:

- в природе существуют заряды двух видов – положительные и отрицательные;
- электрический заряд не меняется при движении его носителя, т.е. является инвариантной величиной;
- электрический заряд обладает свойством аддитивности: заряд системы равен сумме зарядов составляющих систему частиц;
- все электрические заряды кратны элементарному:

$$Q = \pm Ne,$$

где N – число зарядов, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл - элементарный заряд, равный заряду электрона;

- закон сохранения заряда: суммарный заряд электрически изолированной системы сохраняется.

Взаимодействие зарядов. Закон Кулона

Взаимодействие точечных зарядов, т.е. таких, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними, определяется законом Кулона, открытым экспериментально в 1785 году: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величине каждого из них, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по линии, соединяющей заряды.

Закон Кулона может быть записан в виде:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r\,. \qquad (4.1)$$

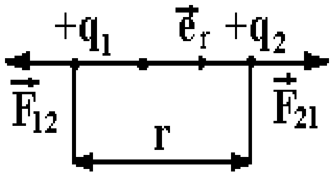


Рис. 4.1

На рис. 4.1 показаны силы отталкивания, действующие на положительные заряды q_1 и q_2, расположенные на расстоянии r друг от друга;

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор, направленный по

линии, соединяющей заряды.

В формулу (4.1) входит коэффициент пропорциональности k, который зависит от выбора системы единиц. Так, в абсолютной электростатической системе единиц СГСЭ k=1, и закон Кулона имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r\,,$$

а соответствующая единица заряда называется абсолютной электростатической единицей заряда (сокращенно СГСЭ - единицей заряда).

В международной системе единиц СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\frac{\Phi}{м} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{\Phi}{м}$ называется электрической постоянной, а закон Кулона выражается формулой

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r. \tag{4.2}$$

Единицей заряда в СИ является кулон (Кл): 1Кл=$3 \cdot 10^9$ СГСЭ – единиц заряда.

Если заряженные тела нельзя рассматривать как точечные заряды, то для нахождения силы взаимодействия между ними их надо разделить на малые элементы, которые можно считать точечными, найти силы взаимодействия между каждой парой заряженных элементов и вычислить результирующую силу как геометрическую сумму сил взаимодействия отдельных элементов.

Электрическое поле. Концепция дальнодействия и близкодействия

Пространство, в котором находятся электрические заряды, обладает определенным физическим свойством: на любой заряд, помещенный в это пространство, действует электрическая сила. Пространство, в каждой точке которого действуют электрические силы, называется электрическим полем. Источником электростатического поля являются неподвижные электрические заряды. Любое заряженное тело создает в окружающем пространстве электрическое поле. Это поле действует с определенной силой на внесенный в него заряд.

Концепция электрического поля как одной из форм материи неразрывно связана с решением проблемы о взаимодействии материальных объектов. Первоначально предполагалось, что электрические силы, как и силы всемирного тяготения, представляют собой «действия на расстоянии без какой-либо промежуточной среды». Скорость передачи действия одного тела на другое считалась бесконечно большой. Это так называемая концепция дальнодействия.

Введение понятия «электрическое поле» позволяет представить взаимодействие заряженных частиц в виде схемы: **частица – поле – частица**, то есть одна частица создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое действует на другую заряженную частицу.

Таким образом, с введением понятия поля место мгновенного дальнодействия заняло передающееся с конечной скоростью действие от точки к ближайшей точке в непосредственно следующие друг за другом моменты времени (концепция близкодействия).

Однако в электростатике обе концепции равноправны в смысле физических выводов, но равноправие исчезает при переходе к электродинамике. Объясняется это тем, что в электростатике электрическое поле неотделимо от заряда. Если ликвидировать заряд, то с точки зрения теории дальнодействия мгновенно исчезает во всем пространстве привязанное к этому заряду электрическое поле. Электромагнитное поле может отрываться от заряда, существовать самостоятельно и распространяться в пространстве.

Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

Основными характеристиками электрического поля являются напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

Напряженностью поля в данной точке называется вектор, равный силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad . \tag{4.3}$$

За единицу напряженности принимается напряженность в такой точке поля, в которой на единичный заряд действует единичная сила.

В СИ $\quad [E] = \dfrac{Н}{Кл} \quad$ или $\quad [E] = \dfrac{Н \cdot м}{Кл \cdot м} = \dfrac{Дж}{Кл \cdot м} = \dfrac{А \cdot В \cdot с}{А \cdot с \cdot м} = \dfrac{В}{м}.$

Если поле создано точечным зарядом Q, то сила взаимодействия зарядов Q и q_0

$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$$

и напряженность поля на расстоянии r от заряда Q равна

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{Q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2 \cdot q_0} \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad . \tag{4.4}$$

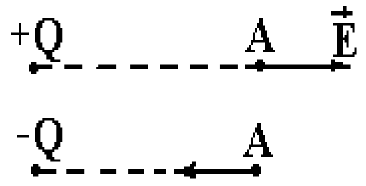


Рис. 4.2

Направление вектора $\vec{E}$ в произвольной точке A (рис.4.2) совпадает по направлению с силой, действующей на положительный заряд q_0, помещенный в эту точку.

Эта сила направлена по линии, соединяющей заряд Q с точкой A.

Если поле создано системой точечных зарядов Q_1, Q_2, …,Q_n, то по закону независимости действия сил результирующая сила, действующая на внесенный заряд q_0, равна

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n .$$

Разделим почленно на q_0 обе части равенства и получим

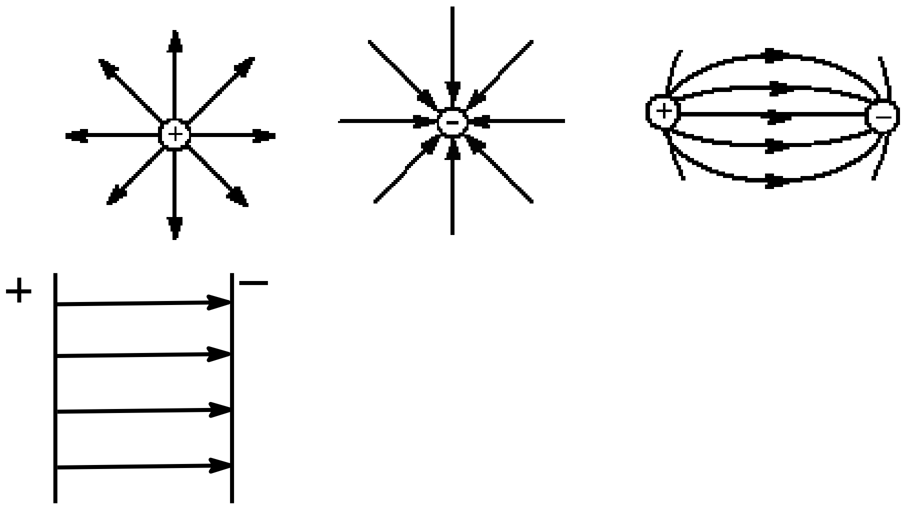
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i , \quad (4.5)$$

то есть напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый заряд в отдельности. Это утверждение носит название принципа суперпозиции электрических полей.

На практике электрические поля создаются, как правило, заряженными телами. Разбивая протяженные заряженные тела на малые элементы dQ, любую систему зарядов можно свести к совокупности точечных зарядов и с помощью принципа суперпозиции найти напряженность поля любой системы зарядов.

Графическое изображение электростатических полей

Электрическое поле принято изображать с помощью силовых линий или линий напряженности. Линиями напряженности называют линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$. Густота линий выбирается так, чтобы число линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной $\vec{E}$, было равно модулю вектора $\vec{E}$. На рис. 4.3 изображены силовые линии полей точечного положительного заряда (а), точечного отрицательного заряда (б), диполя (в), двух равномерно заряженных бесконечных плоскостей (г).



а) б) в) г)

Рис. 4.3

Поле называется однородным, если во всех точках поля напряженность одинакова и по величине и по направлению (см. рис. 4.3, г).

Отметим свойства линий напряженности электростатического поля:

- силовые линии электростатического поля начинаются и кончаются на зарядах, создающих поле, т.е. всегда разомкнуты;
- через каждую точку пространства, в которой нет заряда, проходит только одна силовая линия, т.е. силовые линии не пересекаются в точках, не содержащих заряды.

Потенциальный характер электростатического поля

Пусть в произвольном электростатическом поле, создаваемом заряженным телом, по линии AB перемещается заряд q_0 (рис. 4.4).

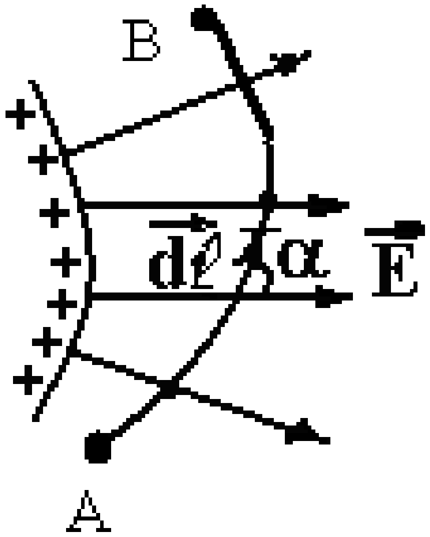


Рис. 4.4

На него действует сила $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Эта сила, перемещая заряд q_0, совершает работу

$$A = \int_{AB} q_0 E d\ell \cos\alpha. \qquad (4.6)$$

Найдем работу по перемещению заряда q_0 в поле точечного заряда Q. Рассмотрим малое перемещение $ab = d\ell$, радиус-вектор точки a обозначим $\vec{r}_1$, точки b – $\vec{r}_2$. Из точки b опустим перпендикуляр bc. Угол между вектором напряженности $\vec{E}$ и перемещением $d\vec{\ell}$ обозначим через α (рис. 4.5). Из треугольника abc найдем ac: $ac = d\ell\cos\alpha$. С другой стороны, из рис. 4.5 видно, что

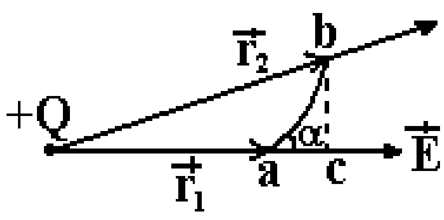


Рис. 4.5

$\overrightarrow{ac} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{dr}$. Сравнивая два выражения для ac, получим, что $d\ell\cos\alpha = dr$, и перепишем (4.6) в виде:

$$A = \int_{AB} q_0 E d\ell \cos\alpha = \int_{r_1}^{r_2} q_0 E dr.$$

Примем во внимание, что напряженность поля точечного заряда $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, и выполним интегрирование:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} q_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что работа в поле точечного заряда Q зависит от начального (r_1) и конечного (r_2) положения заряда q_0 и не зависит от формы его траектории. Можно показать, что этот вывод справедлив для любого электростатического поля. Следовательно, электростатическое поле является потенциальным.

В частности, работа по перемещению заряда по замкнутому пути должна быть равна нулю. Действительно, из (4.7) следует, что в поле точечного заряда при $r_1 = r_2$ A=0**.** В общем случае работа по перемещению заряда по замкнутому пути L равна

$$A = \oint_L q_0 E d\ell \cos\alpha = q_0 \oint_L E d\ell \cos\alpha = q_0 \oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0,$$

откуда следует, что

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0.$$

Интеграл $\oint_L \vec{E} d\vec{\ell}$ называется циркуляцией вектора $\vec{E}$ по замкнутому пути L.

Таким образом, в случае любого электростатического поля

$$\oint_L \vec{E}d\vec{\ell} = 0. \tag{4.8}$$

Потенциал. Разность потенциалов

Как известно, работа сил потенциального поля равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A = -\Delta W_e = W_{e_1} - W_{e_2}. \tag{4.9}$$

Для поля точечного заряда Q (см. формулу (4.7))

$$A = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Из сопоставления формул (4.9) и (4.7) следует, что потенциальная энергия внесенного заряда q_0 в поле точечного заряда Q равна

$$W_e = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) видно, что потенциальная энергия W_e зависит от величины внесенного заряда q_0 и не может служить характеристикой поля. Однако отношение $\frac{W_e}{q_0}$ не зависит от величины внесенного заряда. Величина $\frac{W_e}{q_0} = \varphi$ называется потенциалом поля в данной точке.

Потенциал поля точечного заряда получим, используя соотношение (4.10):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.11}$$

В бесконечно удаленной от заряда Q точке ($r \to \infty$) потенциал обращается в нуль: $\varphi_\infty = 0$.

Выразим теперь работу, совершаемую электрическими силами, через разность потенциалов:

$$A = W_{e_1} - W_{e_2} = q_0 \varphi_1 - q_0 \varphi_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

и рассмотрим два случая.

1. Пусть заряд q_0 перемещается электрическими силами из данной точки в бесконечность:

$$A = q_0(\varphi - \varphi_\infty) = q_0\varphi, \quad \text{отсюда} \qquad \varphi = \frac{A}{q_0},$$

то есть потенциал численно равен работе электрических сил по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

2. Пусть заряд q_0 перемещается из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2:

$$A = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{отсюда} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q_0},$$

то есть разность потенциалов численно равна работе электрических сил по перемещению единичного положительного заряда из первой точки во вторую.

За единицу разности потенциалов принимают разность потенциалов между такими точками поля, при перемещении между которыми единицы заряда совершается единичная работа.

В СИ $[\varphi_1 - \varphi_2] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$ (вольт).

Принцип суперпозиции

Если поле создано системой, состоящей из точечных зарядов, то потенциал в любой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \,. \qquad (4.12)$$

Эквипотенциальные поверхности

Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью. Ее уравнение имеет вид: φ (x, y.z) = const.

Эквипотенциальные поверхности проводят так, чтобы численные значения потенциалов двух соседних поверхностей отличались на одну и ту же величину.

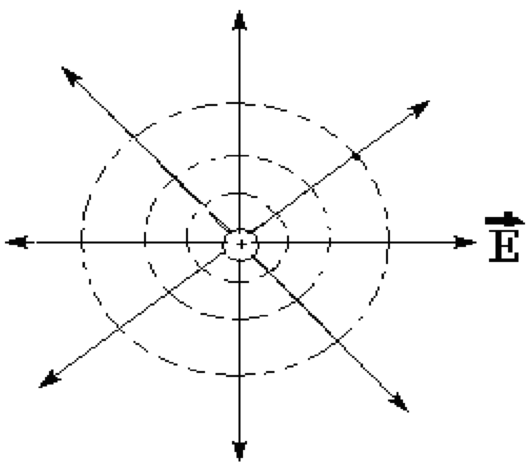


Рис. 4.6

Изобразим эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда +Q, для которого $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Из формулы видно, что при r = const φ = const. Следовательно, поверхности равного потенциала представляют собой сферические поверхности (рис. 4.6).

Покажем, что линии вектора напряженности перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Для случая точечного заряда это видно из рис. 4.6.

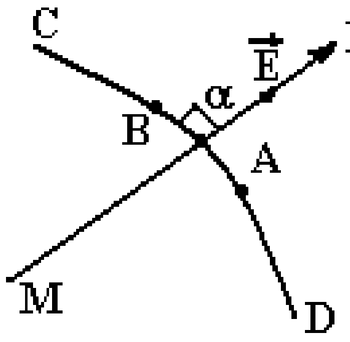


Рис. 4.7

Пусть CD – эквипотенциальная поверхность, а MN – силовая линия некоторого электростатического поля. Покажем, что угол α равен 90^0.

Пусть из точки A в точку B по эквипотенциальной поверхности перемещается заряд q_0. Работа, совершаемая при этом перемещении:

$$dA = q_0(-d\varphi) = q_0(\varphi_A - \varphi_B) = 0,$$

так как точки A и B лежат на одной эквипотенциальной поверхности и имеют одинаковый потенциал. С другой стороны, $dA = q_0 E d\ell \cos\alpha$. Из равенства нулю работы dA следует, что $\cos\alpha = 0$ и $\alpha = 90^0$, так как $q_0 \neq 0$, $E \neq 0$ и $dl \neq 0$.

Связь напряженности и потенциала

Каждая точка поля характеризуется вектором напряженности $\vec{E}$ и скалярной величиной – потенциалом φ. Чтобы установить связь между ними, воспользуемся полученным ранее соотношением между силой, действующей на частицу, и ее потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}W. \qquad (4.13)$$

Заряженная частица Q_0 в электростатическом поле обладает энергией $W_e = Q_0\varphi$, и на нее действует сила $\vec{F} = Q_0\vec{E}$. Тогда

$$Q_0\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Q_0\varphi) \quad \text{и} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi. \qquad (4.14)$$

Напомним, что градиент – это вектор с координатами

$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, поэтому $\vec{E} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y - \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$.

Проекции $\vec{E}$ на координатные оси равны:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (4.15)$$

Знак «минус» показывает, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону уменьшения потенциала.

Для произвольного направления ℓ проекция E_ℓ вектора $\vec{E}$ равна взятой с обратным знаком производной потенциала по этому направлению:

$$E_\ell = -\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}. \qquad (4.16)$$

Поток вектора напряженности

Элементарным потоком вектора напряженности $\vec{E}$ через малый участок $d\vec{S}$ поверхности S, проведенной в поле, называется величина $d\Phi_e$, равная

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E\cdot dS\cos\alpha S, \qquad (4.17)$$

где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности dS и вектором $\vec{E}$ (рис. 4.8). Малый участок $d\vec{S}$ выбирается так, чтобы его можно было считать плоским, а поле в пределах $d\vec{S}$ - однородным. Поток вектора $\vec{E}$ через всю поверхность S равен

$$\Phi_e = \int_S EdS\cos\alpha. \tag{4.18}$$

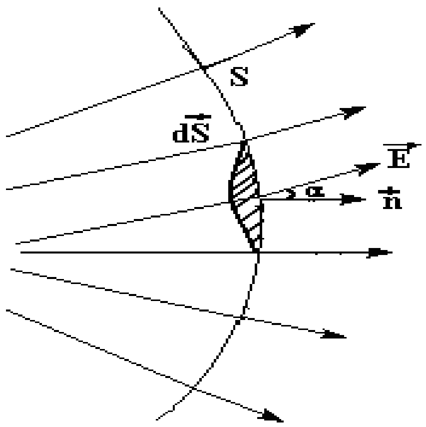


Рис. 4.8

Поток Φ_e – величина скалярная, в зависимости от угла α он может быть как положительным, так и отрицательным. Оказалось, что поток Φ_e через замкнутую поверхность связан с зарядом внутри этой поверхности. Эта связь устанавливается теоремой Гаусса.

Теорема Гаусса

Рассмотрим поле точечного заряда +Q, изобразим силовые линии этого поля и найдем поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность радиуса r (рис. 4.9).

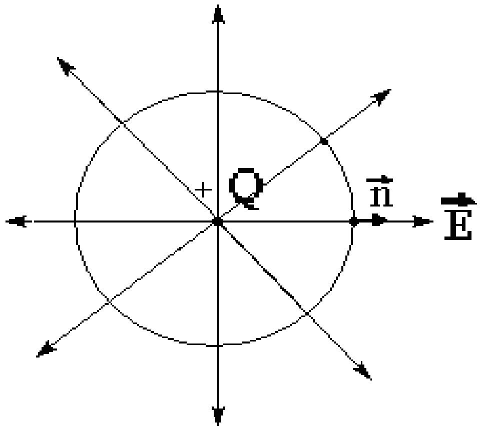


Рис 4.9

По определению $\Phi_e = \oint_S E dS \cos\alpha$, где $\alpha = \left(\vec{E} \hat{\cdot} \vec{n} \right) = 0^0, \cos\alpha = 1$. Для всех точек сферической поверхности $r = \mathrm{const}$, поэтому и $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} =$ const. Вынося E за знак интеграла, получим

$$\Phi_e = E\oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

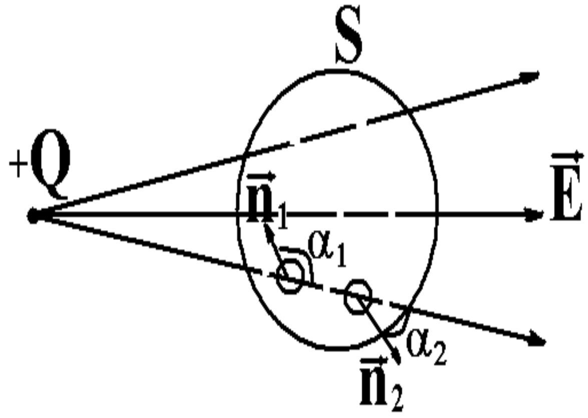
Если окружить заряд произвольной поверхностью, то число силовых линий, пронизывающих эту поверхность, будет таким же, как и в случае сферической поверхности, то есть для произвольной поверхности $\Phi_e = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$.

Если внутри замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то полный заряд будет равен алгебраической сумме отдельных зарядов:

$$Q = \sum Q_i \quad \text{и} \quad \Phi_e = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}. \qquad (4.19)$$

Мы получили теорему Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме находящихся внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную ε_0.

Рассмотрим случай, когда заряды находятся вне замкнутой поверхности.



Из рис. 4.10 видно, что каждая силовая линия пронизывает поверхность S дважды: один раз она входит в поверхность, второй раз – выходит из нее.

Рис. 4.10

Поэтому суммарный поток Φ_e складывается из двух потоков:

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2},$$

где Φ_{e1} – поток, образуемый входящими линиями $\vec{E}$:

$$\Phi_{e1} < 0, \text{ так как } \alpha_1 > 90^0 \text{ и } \cos\alpha_1 < 0;$$

Φ_{e2} – поток, образуемый выходящими линиями $\vec{E}$:

$$\Phi_{e2} > 0, \text{ так как } \alpha_2 < 90^0 \text{ и } \cos\alpha_2 > 0.$$

В силу того, что $|\Phi_{e1}|=|\Phi_{e2}|$, получим $\Phi_e = 0$.

Итак, если заряды находятся внутри замкнутой поверхности, то

$$\Phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

если заряды находятся за пределами этой поверхности, то $\Phi_e=0$.

Теорема Гаусса позволяет рассчитывать напряженности $\vec{E}$ и потенциалы φ электростатических полей и в этом смысле эквивалентна закону Кулона.

Применение теоремы Гаусса

Введем сначала следующие понятия:

1) линейная плотность заряда $\tau = \dfrac{dQ}{d\ell}$ - это величина, равная заряду, распределенному на единице длины проводника;

2) поверхностная плотность заряда $\sigma = \dfrac{dQ}{dS}$ - это величина, равная заряду, распределенному на единице поверхности проводника;

3) объемная плотность заряда $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$ - это величина, равная заряду, сосредоточенному в единице объема проводника.

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть плоскость заряжена положительно с поверхностной плотностью σ (σ = const). Из соображений симметрии линии напряженности $\vec{E}$ имеют вид прямых, выходящих из положительных зарядов перпендикулярно плоскости (рис.4.11). Найдем напряженность поля заряженной плоскости в т. А. Для этого выберем замкнутую поверхность в виде цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными заряженной плоскости. Основания ΔS цилиндра проходят через точку А и симметричную ей точку В.

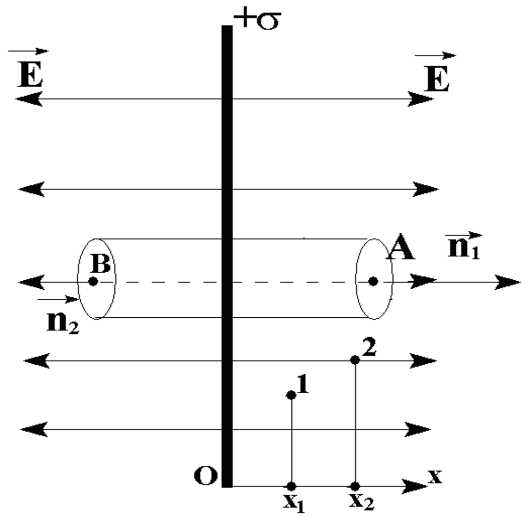


Рис. 4.11

Поток Φ_e вектора $\vec{E}$ через выбранную поверхность складывается из потока $\Phi_{бок.пов.}$ через боковую поверхность цилиндра и потоков $\Phi_{осн1}$ и $\Phi_{осн2}$ через основания цилиндра:

$$\Phi_e = \Phi_{бок.пов.} + \Phi_{осн1} + \Phi_{осн2}.$$

Из рис. 4.11 видно, что линии $\vec{E}$ параллельны образующим цилиндра и нормаль к боковой поверхности в каждой точке перпендикулярна $\vec{E}$, то есть $\cos(\vec{n} \hat{\cdot} \vec{E}) = \cos 90^0 = 0$ и $\Phi_{бок.пов.} = 0$.

По определению $\Phi_{осн.1} = E \cdot \Delta S \cos(\vec{n}_1 \hat{\cdot} \vec{E}) = E\Delta S$,

$$\Phi_{осн.2} = E \cdot \Delta S \cos(\vec{n}_2 \hat{\cdot} \vec{E}) = E\Delta S.$$

Суммарный поток через выбранную цилиндрическую поверхность равен $\Phi_e = \Phi_{осн.1} + \Phi_{осн.2} = 2E\Delta S$.

Внутри выбранной поверхности заключен заряд $Q = \sigma\Delta S$, где ΔS – площадь сечения заряженной плоскости выбранной цилиндрической поверхности.

По теореме Гаусса $\Phi_e = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, то есть $2E\Delta S = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, откуда напряженность поля заряженной плоскости в точке А

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (4.20)$$

Найдем разность потенциалов поля между точками 1 и 2, расположенными на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости (см. рис. 4.11).

Воспользуемся соотношением (4.14): $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi.$

Векторы напряженности $\vec{E}$ направлены по оси Ох, поэтому

$$E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx},$$

откуда $-d\varphi = Edx$. Принимая во внимание (4.20) и интегрируя

$$-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx,$$

получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \qquad (4.21)$$

Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей

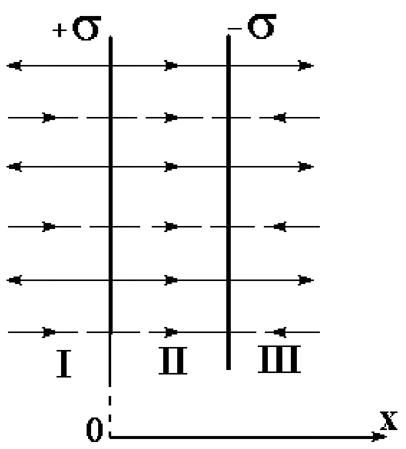


Рис. 4.12

Для рассматриваемого случая воспользуемся принципом суперпозиции полей. Изобразим линии напряженности положительно заряженной плоскости сплошными линиями, отрицательно заряженной плоскости – пунктирными линиями. Укажем направление силовых линий в областях I, II и III (рис. 4.12).

Результирующая напряженность в каждой области по принципу суперпозиции равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напряженность, создаваемая одной плоскостью, определяется формулой (4.20), то есть

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Из рис. 4.12 видно, что в области II векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ сонаправлены и при $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$

$$E_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (4.22)$$

В областях I и III векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены противоположно друг другу, то есть $\vec{E}_I = 0$ и $\vec{E}_{III} = 0$.

Найдем разность потенциалов между плоскостями. Обозначим расстояние между ними через d и воспользуемся соотношением (4.15) для проекции E_x: $E = E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx}$,

$$-d\varphi = E \cdot dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx.$$

Интегрируя $-\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int\limits_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx$,

получим $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$

(4.23)

Поле бесконечно длинного прямого равномерно заряженного цилиндра (провода)

Линии напряженности поля заряженного цилиндра лежат в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, и направлены радиально от поверхности цилиндра, если он заряжен положительно (рис. 4.13).

Найдем напряженность поля, создаваемого цилиндрической поверхностью радиусом R, заряженной равномерно с линейной плотностью $+\tau$, в точке A, расположенной на расстоянии r от оси цилиндра, причем $r>R$.

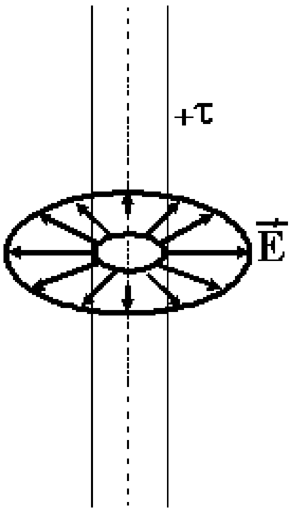


Рис. 4.13

Через точку A проведем вспомогательную цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с осью заряженного цилиндра (на рис. 4.14 она изображена пунктиром). Поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность равен

$$\Phi_e = \Phi_{бок.пов} + \Phi_{осн1} + \Phi_{осн2}.$$

Поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность

$$\Phi_e = \int\limits_{S_{вспом}} EdS \cdot \cos\alpha = E \cdot S_{вспом} = E \cdot 2\pi rh,$$

где $\alpha = (\vec{n} \hat{\cdot} \vec{E}) = 0^0$, h – высота цилиндра.

Поток вектора $\vec{E}$ через нижнее ($\Phi_{осн1}$) и верхнее ($\Phi_{осн2}$) основания вспомогательного цилиндра равен нулю:

$\Phi_{осн1} = 0$ и $\Phi_{осн2} = 0$,

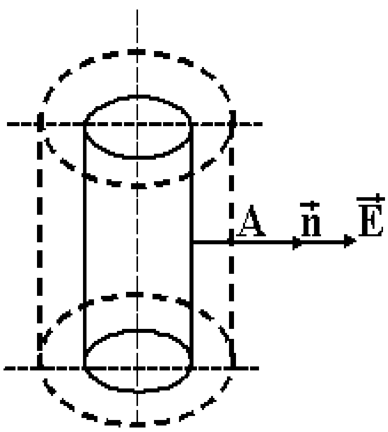


Рис. 4.14

так как нормали к его основаниям перпендикулярны вектору $\vec{E}$ и $\cos(\vec{n} \overset{\wedge}{\cdot} \vec{E}) = 0$. Заряд внутри вспомогательной цилиндрической поверхности $Q=\tau h$.

По теореме Гаусса $\Phi_e = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, то есть $E \cdot 2\pi r h = \dfrac{\tau h}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.24}$$

Разность потенциалов между точками 1 и 2 поля, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра, найдем из соотношения (4.16), которое для нашего случая примет вид:

$$E = E_r = -\frac{d\varphi}{dr} \qquad \text{или} \qquad -d\varphi = E dr.$$

Подставляем в него (4.24) и интегрируем:

$$-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ell n \frac{r_2}{r_1}. \tag{4.25}$$

Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Заряд сферы обозначим Q, радиус – R. Рассмотрим сначала точку A на расстоянии $r > R$ от центра сферы. Силовые линии выходят радиально из положительных зарядов, расположенных на поверхности сферы.

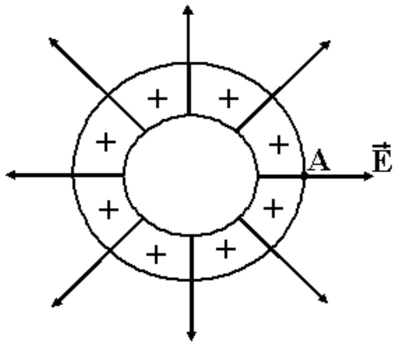


Рис. 4.15

Из соображений симметрии модуль $\vec{E}$ одинаков во всех точках на равном расстоянии от центра сферы.

Через точку А проведем вспомогательную сферическую поверхность радиуса r (рис. 4.15).

Поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность равен:

$$\Phi e = \oint_{S_{вспом}} EdS\cos\alpha = E \cdot S_{вспом} = E \cdot 4\pi r^2 .$$

Заряд внутри вспомогательной поверхности равен Q. По теореме Гаусса найдем, что

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R). \tag{4.26}$$

Таким образом, равномерно заряженная поверхность создает вне себя такую же напряженность, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в центре сферы.

Разность потенциалов между точками 1 и 2 на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{4.27}$$

$(r_1 > R$, и $r_2 > R)$.

Если точка лежит внутри заряженной сферы $(r < R)$, то напряженность E в этой точке равна нулю, так как заряд сосредоточен на поверхности заряженного проводника. Разность потенциалов между любыми двумя точками внутри сферы также равна нулю. Действительно, $E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0$, отсюда $\varphi = \mathrm{const}$, а $\varphi_1 - \varphi_2 = 0.$

Зависимость E=E(r) приведена на рис. 4.16.

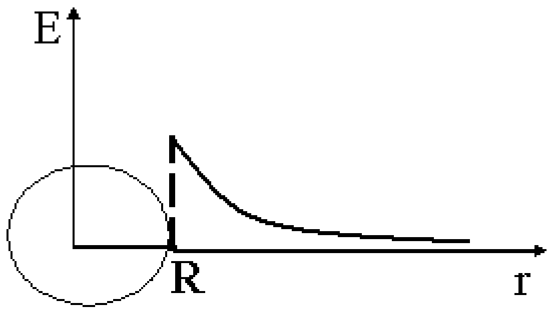


Рис. 4.16