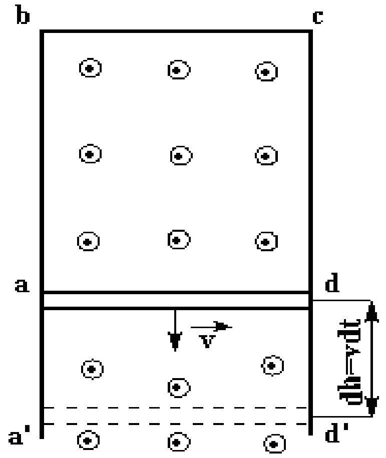
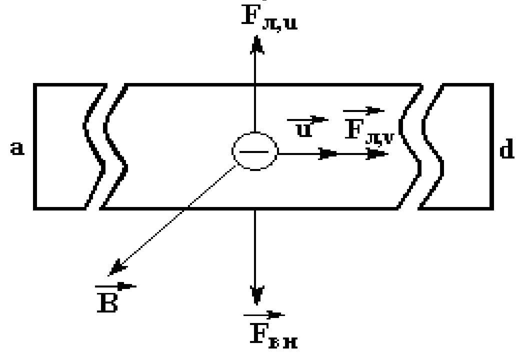
Тема 3.5. Явление электромагнитной индукции Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции

Араго еще в 1824 г. обнаружил: колебания магнитной стрелки резко затухают, если над ней поместить медный диск. Детально в 30-е годы 19 века явление электромагнитной индукции изучил Фарадей, который установил основной закон электромагнитной индукции. Возникающая ЭДС ($\mathcal{E}$) в замкнутом контуре в результате изменения пронизывающего контур магнитного потока пропорциональна изменению этого потока в единицу времени. Ленц открыл закон (правило), позволяющий найти направление индукционного тока: возникающий индукционный ток препятствует своим магнитным полем изменению внешнего поля, порождающего данный индукционный ток. Первые исследователи явления электромагнитной индукции и не предполагали, насколько велика окажется роль этого явления. Электротехника, радиотехника и другие отрасли в значительной мере основаны на этом явлении. А можно ли представить современное производство без электродвигателей, генераторов и трансформаторов?

Закон электромагнитной индукции

Рассмотрим замкнутый проводящий контур abcd, который находится в плоскости листа. Контур пронизывает внешнее магнитное поле индукцией $\vec{B}$: поле направлено перпендикулярно контуру на нас (рис.6.13). Изменение магнитного потока происходит за счет перемещения стороны контура ad со скоростью $\vec{u}$ и, следовательно, возрастания площади контура (рис.6.13, а). Вместе с проводником ad со скоростью v движутся электроны, принадлежащие атомам этого проводника. На каждый из электронов будет действовать сила Лоренца (рис.6.13, б): движение проводника ad вниз со скоростью $\vec{v}$ обусловит возникновение силы $\vec{F}_{л,V}$, приложенной к каждому электрону. Сила $\vec{F}_{л,V}$ вызывает движение электрона со скоростью $\vec{u}$. Дополнительное движение электрона со скоростью $\vec{u}$ приведет к появлению силы Лоренца $\vec{F}_{л,u}$. Силы $\vec{F}_{л,u}$, просуммированные по всем электронам, дадут результирующую силу, которая будет препятствовать движению проводника ad. Для преодоления сопротивления, обусловленного возникающими силами $\vec{F}_{л,u}$, нужно извне приложить силу $\vec{F}_{внеш}$. Работа сил $\vec{F}_{л,v}$ и $\vec{F}_{л,u}$ будет равна нулю; дело в том, что перемещение электрона в направлении скорости $\vec{v}$ и соответствующая сила $\vec{F}_{Ё,V}$ перпендикулярны друг к другу; аналогично направлены друг относительно друга $\vec{u}$ и $\vec{F}_{л,u}$ (см. рис.6.13, б).





а б

Рис.6.13

Равенство нулю работы сил Лоренца является общеизвестным фактом. В нашем случае работу будет совершать внешняя сила $\vec{F}_{внеш}$, направление которой совпадает с направлением перемещения проводника. Если проводник сместить на величину dh, то совершенную работу можно найти по формуле

$$dA = F_{внеш} \cdot dh = F_{внеш} \cdot vdt.$$

Найдем $\vec{F}_{внеш}$. Выше было показано, что $\vec{F}_{внеш}$ равна сумме сил $\vec{F}_{л,u}$.

В свою очередь, $F_{л,u} = e \cdot u \cdot B$, где e - заряд электрона. Итак,

$$dA = e \cdot u \cdot B \cdot n \cdot V,$$

где n - число зарядов в единице объема;

V - объем проводника ad; euBnV - суммарная сила, действующая на заряды в проводнике ad.

Преобразуем выражение для dA, учитывая при этом, что $V=S_0 \ell$, где S_0 - сечение проводника, ℓ - длина проводника; enu=j - плотность тока; $jS_0=I$ - по определению; vdt=dh; $dh\ell=dS$ - изменение площади контура при движении проводника ad; BdS=dΦ - изменение магнитного потока через контур abcd:

$$dA = neuS_0\ell vdt \cdot B = jS_0\ell dh \cdot B = IdS \cdot B = Id\Phi. \qquad (6.22)$$

Возникающая ЭДС по абсолютной величине может быть найдена как отношение dA к величине перемещаемого по контуру заряда dq:

$$|\varepsilon_i| = \frac{dA}{dq} = \frac{Id\Phi}{dq} = \frac{Id\Phi}{Idt} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

С учетом правила Ленца следует писать:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{6.23}$$

Выражение (6.23) и есть закон электромагнитной индукции. Напряженность электрического поля, обусловленного явлением электромагнитной индукции, можно найти из следующих соображений: на электрон действует сила Лоренца, равная произведению euB; действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля напряженностью E с силой, равной E·e, где E-напряженность возникающего поля. Итак, мы имеем:

$$euB = eE \text{ и } E = uB. \tag{6.24}$$

В данном случае мы нашли модуль напряженности поля. Направление E следует находить по правилу Ленца. Если контур, в котором возникает ЭДС, состоит не из одного витка, а из некоторой их совокупности, то

$$\varepsilon_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i,$$

где $\sum_{i=1}^{N}\Phi_i$ - потокосцепление, измеряемое в тех же единицах, что и поток; потокосцепление обозначают буквой Ψ.

Если потоки, пронизывающие каждый из контуров N, одинаковы, то

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N}\Phi_i = N\Phi_i. \tag{6.25}$$

ЭДС индукции в совокупности контуров N равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (6.26)$$

Формулы (6.23) и (6.26) получены из условия, что происходит, по сути, перемещение контура в магнитном поле. Появление ЭДС индукции в замкнутом контуре, движущемся в магнитном поле, можно объяснить действием сил Лоренца на заряды проводника. Логика получения выражений (6.23) и (6.26) соответствует воззрениям Фарадея: для возникновения явления электромагнитной индукции необходим замкнутый контур, в котором изменяющееся магнитное поле возбуждает ток.

Другое объяснение явления электромагнитной индукции дал Максвелл. Он считал, что всякое изменение во времени магнитного поля возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Возникшее электрическое поле можно обнаружить путем помещения в этом пространстве замкнутого контура: в этом контуре начнут перемещаться заряды в соответствии с законом электромагнитной индукции. Но это поле можно обнаружить и без замкнутого контура, например, по поляризации внесенного диэлектрика, ускорению или торможению заряженных частиц. Трактовка явления электромагнитной индукции, данная Максвеллом, является более общей. Она позволяет объяснить возникновение ЭДС и тогда, когда контур находится в покое, а изменяется магнитное поле, пронизывающее контур. В этом случае нет движения проводника, а это значит, что нет упорядоченного движения зарядов и объяснить появление индукционного тока действием сил Лоренца невозможно.

Электродвижущая сила в замкнутом контуре может быть найдена через напряженность поля по формуле

$$\varepsilon_i = \oint_{\ell} \vec{E}_{\ell} d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{6.27}$$

Видно, что циркуляция вектора напряженности электрического поля, возникающего по причине изменения магнитного поля, не равна нулю: $\oint_{\ell} E_{\ell} d\vec{\ell} \neq 0$.

Отсюда следует: электрическое поле, возникающее вследствие явления электромагнитной индукции, является вихревым и этим отличается от электростатического поля, для которого $\oint_{l} E_{\ell} d\vec{\ell} = 0$.

Величина тока по контуру, в котором индуцируется ЭДС, равна:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если проводники массивные, то их R мало, а возникающие токи большие - это обстоятельство часто используют, например, при плавлении металлов. Когда в контуре есть свой источник тока (например, батарейка) и контур движется в магнитном поле, величину тока находят так. Общая работа, совершаемая гальваническим элементом, равна εIdt. Работа на преодоление током сопротивления цепи равна выделенному теплу и определяется по формуле I^2Rdt. Работа перемещения контура в магнитном поле в соответствии с формулой (6.22) равна $Id\Phi$.

Итак, $\varepsilon Idt = I^2Rdt + Id\Phi$.

Величину I из этого соотношения находим по формуле

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{d\Phi}{Rdt} = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R} = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R}, \tag{6.28}$$

где $\mathcal{E}$ - ЭДС гальванического элемента,

$\mathcal{E}_i$ - ЭДС индукции.

Явление самоиндукции

Если по контуру течет изменяющийся ток, то возникающее вокруг контура собственное переменное магнитное поле будет его пронизывать, в контуре при этом индуцируется ЭДС. Описанное явление называют самоиндукцией. Для нахождения величины ЭДС самоиндукции нужно найти изменение потокосцепления $d\Psi$, т.к. $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$. Как известно,

$$d\Psi = Nd\Phi = NdBS_n.$$

По закону Био-Савара-Лапласа $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dI \cdot \ell}{r^2} \sin\alpha$.

Тогда

$$d\Psi = N\frac{\mu_0 \ell S_n}{4\pi r^2} \sin\alpha \cdot dI. \tag{6.29}$$

Величины N, μ_0, ℓ, S_n, r для данного контура (системы витков и проводников) есть постоянные. С учетом этого обстоятельства соотношение $\frac{N\mu_0 \ell S_n \sin\alpha}{4\pi r^2}$ обозначают некоторой константой L и называют индуктивностью, которая измеряется в Гн (генри). С учетом (6.28) найдем ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (6.30)$$

Вычислим для примера величину L соленоида. В соответствии с формулами (6.25) и (6.12)

$$\Psi = NBS; \quad B = \mu_0 nI; \quad \Psi = \mu_0 nIBS; \quad N = n\ell,$$

где n - линейная плотность витков в соленоиде, а ℓ - длина соленоида.

Тогда $$\Psi = \mu_0 n^2 S\ell I = \mu_0 n^2 VI,$$

(6.31)

где V = $\ell \cdot S$ - объем соленоида.

Сравнивая формулу (6.31) с выражением $\Psi = LI$, видим, что

$$L = \mu_0 n^2 V. \qquad (6.32)$$

Явление самоиндукции играет большую роль при замыкании и размыкании цепи, т.е. в момент резкого увеличения или падения тока. Скачкообразное изменение тока обуславливает резкое изменение магнитного потока и возникновение индукционного тока. При замыкании цепи индукционный ток противодействует основному току. Если в цепи подключена лампочка, то она (лампочка) в этом случае загорается постепенно. При размыкании цепи индукционный ток увеличивает основной ток – свечение лампочки резко возрастает. Токи замыкания и размыкания можно найти на основе явления самоиндукции. Ток в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R},$$

где $\mathcal{E}$ - ЭДС источника тока; $\mathcal{E}_i$ - ЭДС индукции; R - сопротивление цепи;

Следовательно, $$I = \frac{\mathcal{E}-\frac{d\psi}{dt}}{R} = \frac{\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt}}{R}.$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}.$$

Если величину L считать константой, что вполне правомерно при отсутствии в цепи ферромагнетиков дальнейшие преобразования выглядят так:

$$\frac{dI}{\mathcal{E}-IR} = \frac{1}{L}dt \qquad \text{или} \qquad -\frac{1}{R}\frac{d(\mathcal{E}-IR)}{\mathcal{E}-IR} = \frac{1}{L}dt$$

(вместо dI записано: $-\frac{1}{R}d(\mathcal{E}-IR)$ - после раскрытия скобок и умножения на $(-\frac{1}{R})$ получается dI).

Тогда

$$\frac{d(\mathcal{E}-IR)}{\mathcal{E}-IR} = -\frac{R}{L}dt.$$

При интегрировании учтем, что $\mathcal{E}$, R и L константы. Получим:

$$\ln(\mathcal{E}-IR) = -\frac{Rt}{L} + \ln C,$$

где C - постоянная интегрирования.

После потенциирования имеем: $\mathcal{E} - IR = C \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.

Найдем C из условия, что в начальный момент времени (t=0) ток I равен $I_0 (I = I_0)$:

$$\mathcal{E} - I_0 R = cI_0,\ C = \mathcal{E} - I_0 R.$$

Подставим значение C:

$$\mathcal{E} - IR = (\mathcal{E} - I_0 R)e^{-\frac{Rt}{L}};$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) + I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Мы получили в общем виде изменение тока во времени. Теперь рассмотрим ситуацию при замыкании:

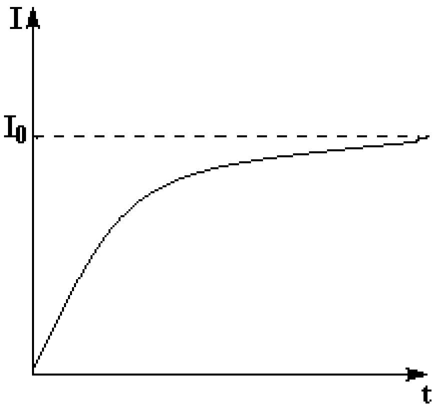
$$I_0 = 0;$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

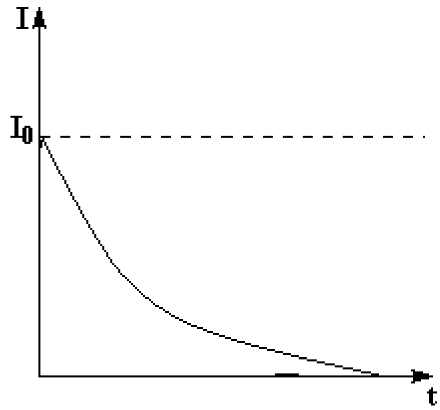
(6.33)

Графически соотношение (6.33) изображено на рис.6.14,а. При размыкании имеем:

$$\mathcal{E} = 0;\ I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}. \qquad (6.34)$$



а



б

Рис.6.14

Зависимость (6.34) графически представлена на рис.6.14,б. Из рис.6.14, а также формул (6.33) и (6.34) видно, что возрастание тока при замыкании и уменьшение его при размыкании происходит тем резче, чем больше активное сопротивление R и чем меньше индуктивность цепи L. Если время $t=\tau=L/R$, то ток при размыкании уменьшается в e раз:

$$I = I_0 e^{-\frac{R\tau}{L}} = I_0 e^{-\frac{R \cdot L}{L \cdot R}} = I_0 e^{-1} = \frac{I_0}{e}.$$

Величину τ называют постоянной времени для данной цепи.

Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь на рис.6.15.

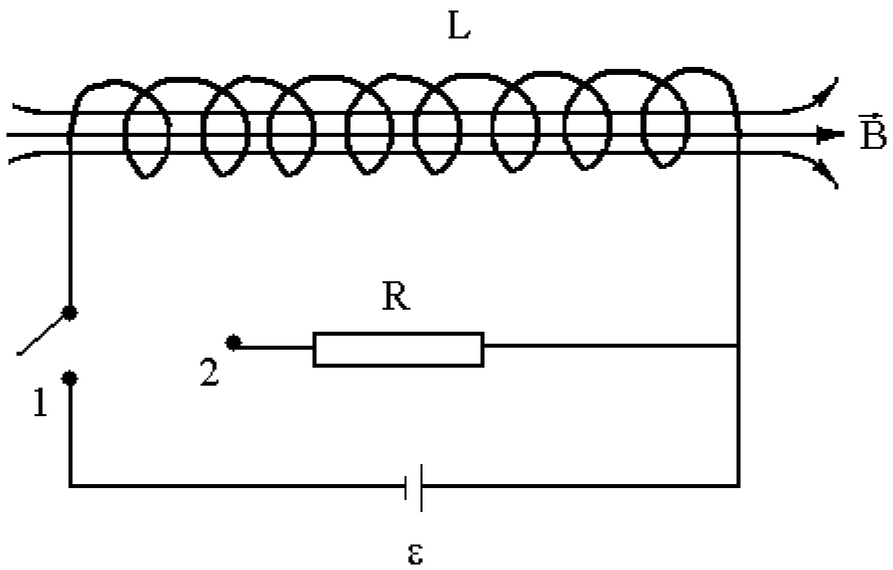


Рис.6.15

При замыкании ключа K с точкой 1 через катушку L потечет нарастающий ток, в зоне расположения катушки возникнет магнитное поле. Для создания этого поля источник тока в момент включения совершил работу A'. После переключения ключа в т.2 источник тока отключается, но по сопротивлению R потечет ток, что можно заметить по нагреванию этого сопротивления.

Единственное, что произошло в окружающем пространстве после переключения ключа из т.1 в т.2, – это исчезновение магнитного поля вокруг катушки L. Таким образом, работа по нагреванию сопротивления была совершена за счет изменения энергии магнитного поля. Естественно, что эта работа должна быть равна той работе, которая была совершена источником тока при возникновении магнитного поля: A=A'.

Если мы найдем A или A', то тем самым найдем энергию магнитного поля.

ЭДС самоиндукции во времени изменяется, поэтому работу по нагреванию сопротивления R нужно находить интегрированием:

$$A=\int_{I}^{0} dA=\int_{I}^{0} \varepsilon_i I dt=\int -\frac{d\Psi}{dt} I dt.$$

Подставляя вместо $d\Psi$ величину LdI (см. формулу (6.30)), найдем:

$$\int_{I}^{0} - LdI \cdot I = L\frac{I^2}{2},\ A=\frac{LI^2}{2}. \tag{6.35}$$

Пределы интегрирования взяты от I до 0, т.к. при отключении источника ε ток в цепи уменьшается до нуля. Энергия магнитного поля W, как это было отмечено выше, равна найденной по формуле (6.35) работе, т.к. конечное значение энергии магнитного поля равно нулю:

$$W=\frac{LI^2}{2}.$$

Найдем выражение для W через характеристики магнитного поля. Рассмотрим случай, когда поле создано бесконечно длинным соленоидом: $L = \mu_0 n^2 V;\ B = \mu_0 nI;\ H = nI$,

$$W = \frac{\mu_0 n^2 V H^2}{2n^2} = \frac{\mu_0 H^2 V}{2}.$$

Если в сердечнике есть магнетик с относительной магнитной проницаемостью μ, то

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2 V}{2}. \qquad (6.36)$$

Энергия магнитного поля, как следует из (6.36), распределена в объеме соленоида V. На единицу объема будет приходиться энергия

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Величину w называют объемной плотностью энергии. Зная w, можно найти энергию поля в любом объеме:

$$W = \int_V w dW. \qquad (6.37)$$

Выражение для w можно записать в другом виде, используя взаимосвязь между B и H:

$$B = \mu_0 \mu H;\ w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$