

Электромагнитные колебания.

Электромагнитные колебания обычно рассматривают с помощью контура с конденсатором C и катушкой индуктивности L . При рассматривании колебаний используют закон Ома и правила Киркгоффа, которые оказываются справедливыми и для квазистационарных токов. Т.к. электромагнитное поле распространяется со скоростью света и ток во всех участках цепи мгновенно становится одинаковым, то эти токи можно считать квазистационарными.

Условие квазистационарности токов:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T \quad (132)$$

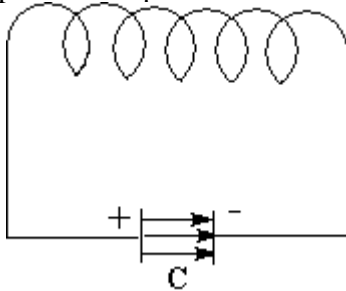
где l – длина цепи; c – скорость света; T – период изменения тока в цепи.

Например, при периоде колебаний $T=10^{-6}$ с в контуре длиной $l=3$ м $\tau = \frac{3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-8}$, т.е. $\tau \ll T$ – токи в рассматриваемом контуре можно считать квазистационарными.

Свободные незатухающие колебания.

Такие колебания возникают в контуре, если сопротивление R проводников принимают равным нулю.

а) Поместим при разомкнутой цепи на обкладки конденсатора начальный заряд q_0 . Энергия контура в момент помещения заряда на обкладки будет равна энергии электрического поля.

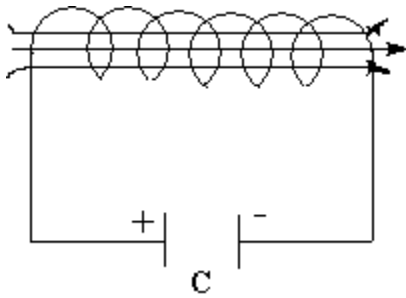


$$W_e = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

$$q = q_{\max}, U = U_{\max}$$

$$I = 0, W_{\mu} = 0$$

б) При замыкании цепи конденсатор начнет разряжаться, по цепи потечет ток, вокруг катушки возникнет магнитное поле, т.к. ток возрастет до максимального значения I_0 . Начальная энергия конденсатора полностью перейдет в энергию магнитного поля, которая в данный момент будет максимальной.

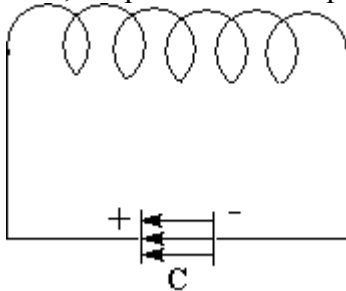


$$W_{\mu} = L \frac{I_0^2}{2}$$

$$q=0, U=0$$

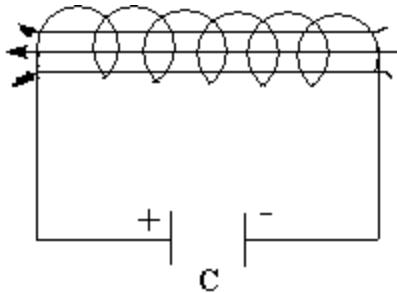
$$W_e=0, I=I_{\max},$$

В) Затем магнитное поле начинает уменьшаться, возникнет индукционный ток, конденсатор перезарядится. К моменту уменьшения магнитного поля до нуля, конденсатор полностью перезарядится, энергия окажется равной исходной.



$$W_e = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

г) Дальнейший разряд конденсатора сопровождается появлением магнитного поля вокруг катушки вновь.



$$W_{\mu} = L \frac{I_0^2}{2}$$

Электромагнитные колебания – процесс периодических изменений I , U и q в контуре.

Применим закон Ома к колебательному контуру. Т.к. нет источника тока, падение напряжения на участках контура:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}; \quad \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (133)$$

где q/C – падение напряжения на конденсаторе, $L(dI/dt)$ – падение напряжения на катушке индуктивности.

Учтем, что:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{т.к. } I = dq/dt$$

Обозначим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Получаем:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0; \quad \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0; \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (134)$$

Уравнение (134) – однородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его решением является уравнение:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (135)$$

где q – текущее значение заряда в любой данный момент времени t ; q_0 – максимальное (амплитудное) значение заряда; $\omega_0 t + \alpha$ – фаза колебания; α – начальная фаза колебания.

Из уравнения (135) видно, что заряд конденсатора изменяется по гармоническому закону с некоторым периодом T . Исходное значение косинуса угла в (135) – 2π , т.е.:

$$\begin{aligned} [\omega_0(T+t) + \alpha] - (\omega_0 t + \alpha) &= 2\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_0 T &= 2\pi; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (136)$$

ω_0 – собственная частота колебаний контура.

Из (136) следует:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (137)$$

- период колебаний через параметры контура.

Найдем закон изменения напряжения и тока во времени, учтя, что $U = q/C$; $I = dq/dt$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (138)$$

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = q_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (139)$$

$$(Т.К. - \sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right); \quad q_0 \omega_0 = I_0)$$

Выразим через α параметры контура

$$U = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega_0 C} = \frac{I_0 \sqrt{LC}}{C} = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (140)$$

Из уравнения (138) видно:

$$\frac{UC}{q_0} = \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

при $t=0$; $U=U_0$

$$\frac{UC}{q_0} = \cos \alpha$$

Из уравнения (139):

$$-\frac{I}{q_0 \omega_0} = \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

при $t=0$

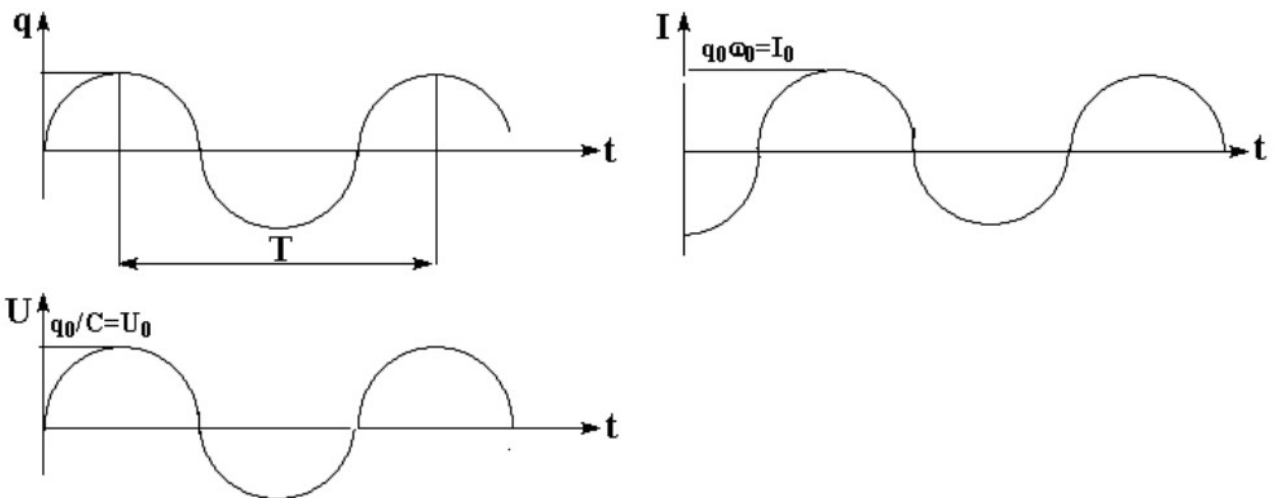
$$-\frac{I}{q_0 \omega_0} = \sin \alpha$$

Найдем $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{I_0 q_0}{q_0 \omega_0 U_0 C} = -\frac{I_0 \sqrt{LC}}{U_0 C} = -\frac{I_0}{U_0} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (141)$$

Отсюда можно найти α .

Графически:



Из рисунков видно, что колебания заряда и напряжения происходят в одной фазе, а колебания тока опережают по фазе на 90° колебание заряда.

Свободные затухающие колебания

Реальный колебательный контур всегда содержит активное сопротивление R , следовательно, при отсутствии источника энергии колебания в нем будут затухать. В соответствии с законом Ома сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна нулю, т.к. эдс в цепи нет:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0 \quad (142)$$

где RI – падение напряжения на сопротивлении.

Учтем, что $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

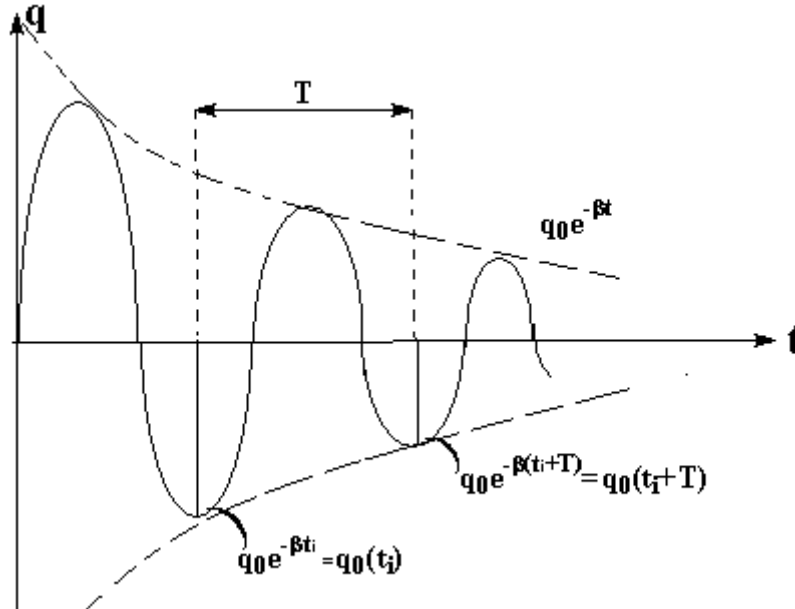
Обозначим: $R/L = 2\beta$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (143)$$

- однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, решением которого является функция:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (144)$$

где $q_0 e^{-\beta t}$ – функция, определяющая изменения амплитуды колебания заряда. С течением времени амплитуда экспоненциально уменьшается; $\alpha = 90^\circ$; $\cos(\omega_0 t + \alpha)$ – функция, определяющая характер колебаний.



Частота затухающих колебаний определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (145)$$

ω – вещественная и положительная, если $\omega_0^2 > \beta^2$.

Выразим ω через параметры контура:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (145')$$

Если $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ - колебаний нет, наблюдается апериодический разряд конденсатора.

$$\frac{R_{\text{кр}}^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \Rightarrow R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (146)$$

Найдем изменение напряжения в конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{C} \cos(\omega t + \alpha)$$

Ток в цепи:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = q_0 \left[e^{-\beta t} \cdot (-\beta) \cos(\omega t + \alpha) + e^{-\beta t} \cdot (-\omega \sin(\omega t + \alpha)) \right] = \\ &= q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)] \end{aligned}$$

Умножим и разделим каждое слагаемое на ω_0 и обозначим:

$$-\frac{\beta}{\omega_0} = \cos \psi; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sin \psi \quad (147)$$

$$\begin{aligned} I &= \omega_0 q_0 e^{-\beta t} [\cos \psi \cdot \cos(\omega t - \alpha) - \sin \psi \cdot \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi) \end{aligned} \quad (148)$$

(с использованием $\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$)

ψ - такой угол, для которого косинус – величина положительная, а синус – отрицательная $\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \psi < \pi$

Колебания тока при затухающих колебаниях опережают по фазе колебание заряда на угол более $\pi/2$ (при незатухающих всегда $\pi/2$).

Затухание характеризуют величиной λ - логарифмическим декрементом затухания.

$$\lambda = \ln \frac{q_0(t_i)}{q_0(t_i + T)} \quad (149)$$

где T – период колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{4L - R^2 C}}$$

$q_0(t_i)$, $q_0(t_i + T)$ – значения амплитуд колебаний заряда, равный периоду колебаний.

Запишем (149) в явном виде:

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln \frac{q_0(t_i)}{q_0(t_i + T)} = \ln \frac{e^{-\beta t_i}}{e^{-\beta t_i} \cdot e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} \\ \Rightarrow \lambda &= \beta T; \quad \beta = \frac{\lambda}{T} \end{aligned} \quad (150)$$

Обозначим время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз через τ :

$$q = q_0 e^{-\beta \tau} = q_0 e^{-1}; \quad e^{-\beta \tau} = e^{-1} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{\lambda}{T} \tau} = e^{-1}$$

Получаем:

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

Коэффициент затухания – величина, обратная промежутку времени, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз.

$\lambda \frac{\tau}{T} = 1$, величина $\frac{\tau}{T}$ - число колебаний N_e , которые произойдут в контуре за время уменьшения амплитуды в e раз.

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \quad (151)$$

Величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (152)$$

называется **добротностью контура**.

Добротность тем выше, а логарифмический декремент затухания тем меньше, чем больше контур совершит колебаний за время уменьшения амплитуды в e раз.

Найдем Q через параметры контура:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\frac{R}{2L} T} = \frac{2\pi L}{RT} = \frac{\omega}{2\beta}$$

Если $\omega^2 \gg \beta^2$, то $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1 \cdot 2L}{\sqrt{4C} \cdot 2R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Вынужденные электромагнитные колебания

Вынужденные колебания – колебания, которые происходят в контуре, содержащем источник тока.

В этом случае падение напряжения:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = U_0 \cos(\omega t) \quad (153)$$

где $U_0 \cos(\omega t)$ – изменение напряжения в источнике тока.

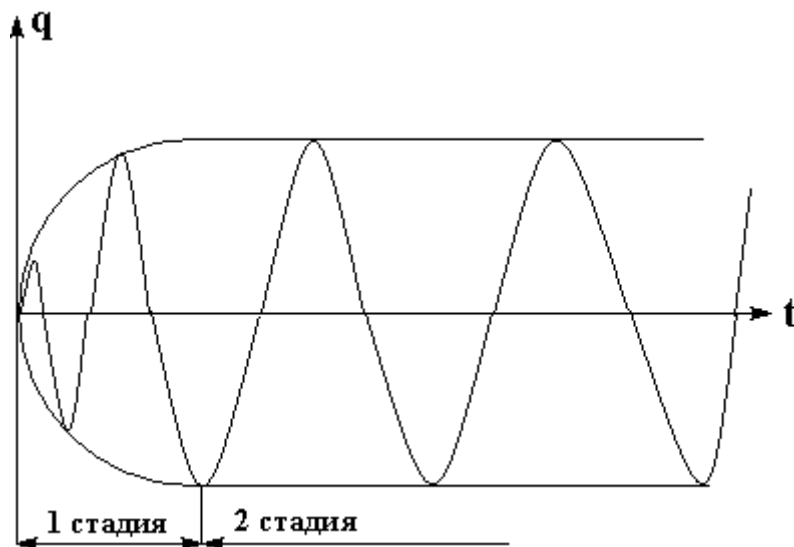
Уравнение (153) – неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, его решение состоит из 2 функций. Одна из них – общее решение уравнения (153):

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha') \quad (154)$$

Вторая – частное решение:

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (155)$$

где q_0 – амплитудное значение заряда на конденсаторе; φ – угол, определяемый по формуле: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – сдвиг фазы вынужденных колебаний, относительно фазы колебаний, обусловленных источником.



Процесс колебания состоит из 2-х стадий: **1** – сказывается роль функции (154), **2** – роль функции (154) сводится к нулю. Т.о., после установления, процесс колебаний описывается:

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Подставим в (153), получим:

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (156)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \quad (157)$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = q_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (158)$$

Найдем амплитудное значение тока:

$$I_0 = q_0 \omega = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (159)$$

Текущее значение тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (160)$$

Напряжение на активном сопротивлении R :

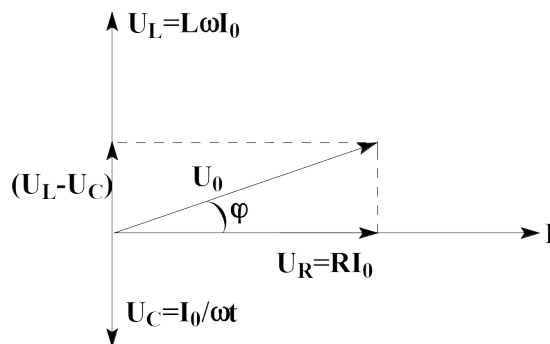
$$U_R = IR = RI_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (161)$$

Напряжение на катушке индуктивности:

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} (-I_0 \sin(\omega t - \varphi)) = -L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= L\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi) \end{aligned} \quad (162)$$

Если сопоставить (158), (161) и (162) с (160) видно, что напряжение на сопротивлении отстает по фазе от силы тока на $\pi/2$, а напряжение на индуктивности опережает ток на $\pi/2$.

Графически:



Векторная диаграмма

Анализ полученных зависимостей позволяет установить, что амплитуда колебаний зависит от частоты. При некоторой частоте источника амплитуда колебаний в контуре достигает максимума – **резонанс**, соответствующая частота – **резонансная**.

Найдем резонансную частоту, приравнявая первую производную функции, определяющей величину амплитуды, к нулю:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0$$

Максимум при резонансе тем выше, чем меньше β , равная $R/2L$, т.е. чем меньше активное сопротивление. Для текстильной промышленности – если собственная частота колебаний волокнистого материала близка к частоте прикладываемого усилия, то амплитуда колебания волокна резко возрастает, может возникнуть обрыв.

