1.1. Элементы кинематики

1.1.1. Предмет механики. Классическая, релятивистская и квантовая механика

Механика изучает простейший вид движения – механическое движение, которое сводится к перемещению тел или частей тел относительно друг друга. При этом всякое изменение происходит с течением времени (изменение взаимного расположения тел в пространстве и времени). Пространство и время – формы существования материи. Всякое материальное тело имеет пространственную протяженность. Время выражает последовательность состояний материи, составляющих любой процесс, любое движение, и служит мерой длительности процесса.

Мир изученных к настоящему времени материальных явлений характеризуется очень широким диапазоном расстояний, промежутков времени и скоростей движения.

Существует классическая, или ньютоновская, механика, в которой рассматриваются движения тел значительных масс со скоростями, малыми по сравнению со скоростями света с ($c=3\cdot 10^8$ м/с). Скорость света является универсальной константой, с которой связано деление законов физики на классические и релятивистские. Движения тел со скоростями, близкими к скорости света, не подчиняются законам классической механики. Для описания этих движений служит релятивистская механика, созданная

А. Эйнштейном в 1905 г.

Другой универсальной константой является постоянная Планка ħ ($\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с), с которой связано разделение физических законов на классические и квантовые. Тела, для которых $m\cdot v\cdot r \gg \hbar$, где m - масса частицы (тела), v – ее скорость, r – линейный размер области движения, называются макроскопическими. Движения этих тел описывают законами классической механики.

Движения тел, для которых $m\cdot v\cdot r \sim \hbar$, подчиняются законам квантовой механики.

1.1.2.Кинематическое описание движения. Основные кинематические понятия

1. *Материальная точка. Абсолютно твердое тело*

При изучении механического движения реальных объектов в физике используются их приближенные образы или физические модели, такие, как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело, сплошная среда.

Материальной точкой называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Абсолютно твердым телом называется тело, размеры и форма которого не меняется в процессе движения.

2. *Система отсчета*

Механическое движение независимо от того, с какой скоростью оно происходит, является относительным. Совокупность тел или тело, по отношению к которым рассматривается движение, называют **телом отсчета**. Тело отсчета плюс способ отсчета времени образуют **систему отсчета**. Для описания движений систему отсчета связывают с Землей, считая ее неподвижной. В ряде случаев в качестве тела отсчета выбирают Солнце или отдаленные звезды. За систему отсчета можно выбрать декартову прямоугольную систему координат и задавать положение тела тремя координатами x, y, z, которые будут функциями времени. Можно применять и другие системы: полярную, сферическую, цилиндрическую.

Линия, вдоль которой материальная точка движется в пространстве в выбранной системе отсчета, называется **траекторией.**

По форме траектории движения можно разделить на прямолинейные и криволинейные.

3. *Путь, перемещение*

Пусть при движении по криволинейной траектории материальная точка в некоторый момент времени t заняла положение А с радиусом-

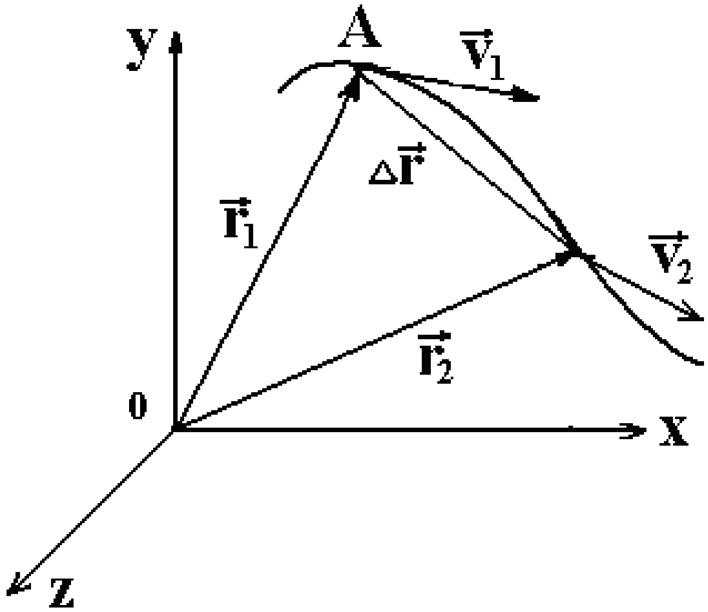


Рис. 1.1

вектором $\vec{r}_1$, а в момент времени $t_2 = t_1+\Delta t$ – положение B с радиусом-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 1.1).

За время $\Delta t=t_2-t_1$ радиус-вектор получил приращение $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, называемое **перемещением или вектором перемещения**.

Длина части траектории, пройденной точкой с начала отчета времени, называется **длиной пути** S=f(t).

4. *Скорость материальной точки*

Средней векторной скоростью материальной точки называют отношение приращения радиуса-вектора точки к тому промежутку времени, за который это приращение произошло:

$$<\vec{v}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

Из (1.1) видно, что $<\vec{v}>\uparrow\uparrow\Delta\vec{r}$.

Аналогично отношение $<\vec{v}> = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется **средней путевой скоростью**.

Если $\Delta t \to 0$, то отношение $\Delta \vec{r} / \Delta t$ стремится к некоторому пределу, называемому скоростью материальной точки в момент времени t или мгновенной скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.2)$$

Мгновенной скоростью $\vec{v}$ точки называют вектор, численно равный первой производной по времени от радиуса-вектора, определяющего положение точки в данный момент времени. Вектор скорости $\vec{v}$ направлен к траектории в этой точке (см. рис. 1.1), т.е. можно записать:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \qquad (1.3)$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к траектории в данной точке;

v – модуль скорости, равный

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ .$$

5. *Ускорение материальной точки*

Ускорение материальной точки характеризует быстроту изменения скорости.

Средним ускорением точки называют вектор, равный отношению приращения скорости к тому промежутку времени, за который произошло это приращение:

$$\langle \vec{a} \rangle = \Delta \vec{v} / \Delta t = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \qquad (1.4)$$

Вектор

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \qquad (1.5)$$

называется **мгновенным ускорением** точки, или ускорением в данный момент времени.

1.1.3. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения

При криволинейном движении происходит изменение скорости как по величине, так и по направлению. Обозначим скорость точки в момент времени t_1=t через $\vec{v}_1$, в момент времени t_2=t+Δt – через $\vec{v}_2$.

За промежуток времени произошло приращение скорости $\Delta\vec{v}$:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Перенесем вектор $\vec{v}_2$ параллельно самому себе в точку А и построим вектор $\Delta\vec{v}$ (рис 1.2).

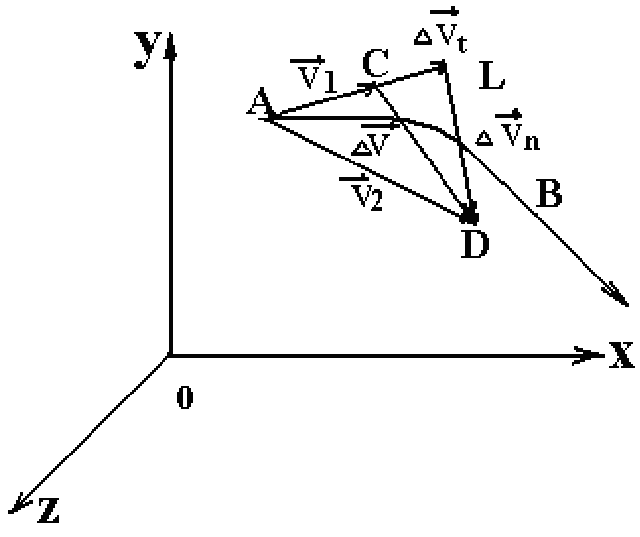


Рис. 1.2

Представим вектор $\Delta\vec{v}$ в виде суммы двух векторов, для чего вдоль направления $\vec{v}$ отложим длину AL вектора $\vec{v}_2$ и соединим точки D и L .

Из рисунка видно, что $\Delta\vec{v} = \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LD}$, причем вектор $\overrightarrow{CL}$

дает изменение скорости по величине: $\overrightarrow{CL} = \Delta \overrightarrow{V_t}$, а вектор $\overrightarrow{LD}$ – по направлению: $\overrightarrow{LD} = \Delta \overrightarrow{V_t}$.

Тогда $$\Delta\vec{V} = \Delta\overrightarrow{V_t} + \Delta\overrightarrow{V_n}.$$
(1.6)

Разделим (1.6) почленно на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Получим, что полное ускорение точки равно

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (1.8)$$

Первое слагаемое $\vec{a}_t$ в (1.8) характеризует быстроту изменения скорости по величине и называется **тангенциальным ускорением**. Легко показать, что

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \quad (1.9)$$

Второе слагаемое $\vec{a}_n$ в (1.8) характеризует изменение скорости по направлению и называется **нормальным ускорением**.

Численное значение нормального ускорения равно:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.10)$$

где ρ – радиус кривизны траектории в точке, в которой определяется ускорение. Направление a_n совпадает с нормалью $\vec{n}$ к траектории. Векторы $\vec{a}, \vec{a}_t, \vec{a}_n$ изображены на рис 1.3.

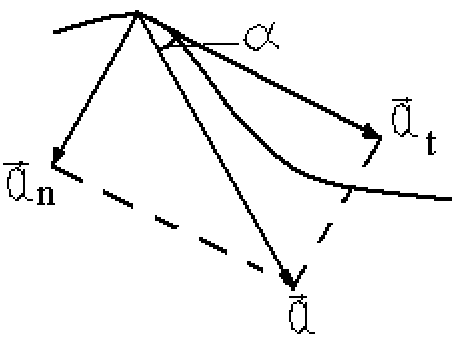


Рис. 1.3

Из рисунка видно, что модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

а направление его определяется углом α: $tg\alpha = \frac{a_n}{a_t}$.

1.1.4. Степени свободы и обобщенные координаты. Степени свободы абсолютно твердого тела

Числом степеней свободы j называется минимальное число независимых движений, которые совершаются в системе, или число независимых координат, однозначно определяющих положение системы.

Например, положение точки на плоскости однозначно определяется заданием двух независимых координат x и y, следовательно, для нее i=2 (рис. 1.4а). Точка, движущаяся в пространстве, имеет три степени свободы i=3 (рис. 1.4б).

Произвольное движение абсолютно твердого тела можно представить как поступательное движение некоторой его точки (например, центра масс) и вращательное движение тела относительно оси, проходящей через эту точку.

Поэтому для определения положения абсолютно твердого тела необходимо задать:

- положение его центра тяжести (координаты x, y, z);
- направление оси вращения (углы θ и φ, которые ось вращения составляет с двумя из трех координат осей);
- угол φ - угол поворота тела вокруг оси вращения от некоторого начального положения.

Таким образом, твердое тело имеет шесть степеней свободы (i=6).

Если число степеней свободы системы больше трех, то целесообразно ее движение рассматривать не в декартовых, а в обобщенных координатах.

Обобщенными координатами называются независимые параметры q_j (j = 1.2, ….., i), число которых равно числу степеней свободы механической системы.

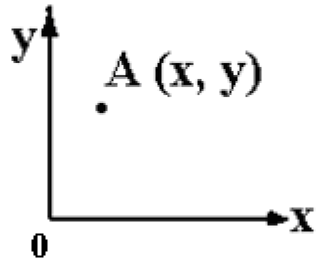


Рис. 1.4 а

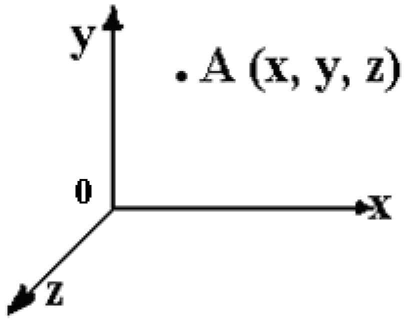


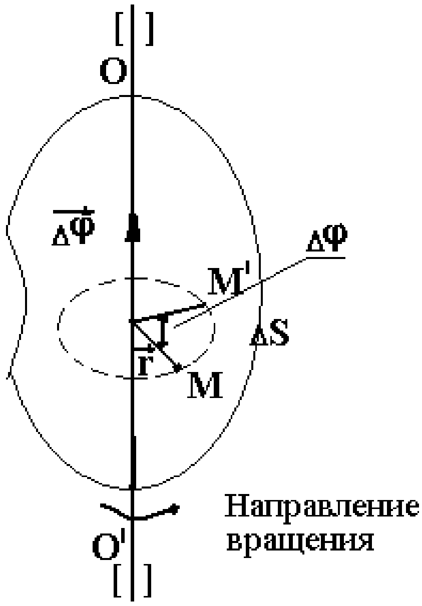
Рис. 1.4 б

1.1.5. Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела относительно неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки твердого тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**.

1. Угловое перемещение

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси OO′ точка M этого тела с радиусом – вектором $\vec{r}$ (рис. 1.5) за время Δt



пройдет путь, равный длине дуги Δs, а радиус - вектор $\vec{r}$ повернется на угол $\Delta\varphi$.

Величина $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s}{r}$ называется углом поворота радиуса-вектора выбранной точки от некоторого начального положения или модулем углового перемещения.

Рис.1.5

Для указания направления вращения малым углам поворота приписывается направление: $\Delta\vec{\varphi}$ направлен по оси вращения так, чтобы рассматриваемое с его конца вращение происходило против часовой стрелки (правило правого винта).

Если тело сделало N оборотов, то $\Delta\varphi = 2\pi \cdot N$.

2. Угловая скорость

Отношение угла поворота радиуса – вектора некоторой точки твердого тела к тому промежутку времени, за который совершается этот поворот, называется средней угловой скоростью:

$$<\vec{\omega}> = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \qquad (1.11)$$

При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ получим выражение мгновенной угловой скорости

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} <\vec{\omega}> = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.12)$$

Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$. За единицу угловой скорости принимается скорость такого вращения, при котором угол меняется на 1 радиан за 1 секунду:

$$[\omega] = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Если тело делает n оборотов в секунду, то его угловая скорость $\omega = 2\pi n$.

3. Угловое ускорение вращающегося тела

Пусть за время $\Delta t = t_2 - t_1$ угловая скорость вращения изменилась на величину $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$. Отношение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ называется средним угловым ускорением.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим выражение для углового ускорения в заданный момент времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.13}$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен по оси вращения, при ускоренном вращении $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, при замедленном вращении $\vec{\varepsilon} \downarrow\uparrow \vec{\omega}$.

4. Связь угловых и линейных величин

Найдем связь угловой (ω) и линейной (v) скоростей, а также углового и линейного ускорения. В самом деле,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{s}{r} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}. \tag{1.14}$$

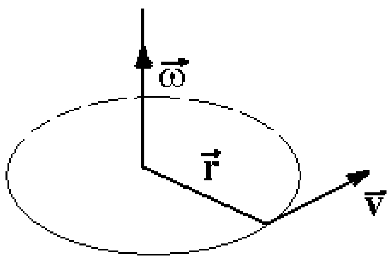


Рис. 1.6

Из рис. 1.6 видно, что (1.14) можно записать в векторной форме

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.15}$$

(по определению векторного произведения).

Чтобы найти связь ускорений $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{a}$, продифференцируем (1.15) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{1.16}$$

Первое слагаемое в (1.16) представляет собой тангенциальное ускорение $\overrightarrow{a_t}$ (рис. 1.7), т.к. вектор a_t $= \varepsilon \cdot R = \dfrac{d\omega}{dt} \cdot R = \dfrac{d}{dt}(\omega \cdot r) = \dfrac{dv}{dt}$.

Второе слагаемое в (1.16) является нормальным ускорением $\overrightarrow{a_n}$, т.к. вектор

$$\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{\omega} \times v$$

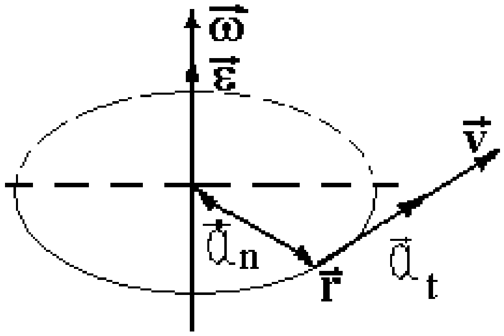


Рис. 1.7

направлен по радиусу вращения к центру и по модулю равен

$$\vec{a}_n = \omega \cdot v = \frac{v^2}{r}.$$

Полное ускорение при вращательном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

а его модуль