1.2. Динамика частиц. Закон сохранения импульса

1.2.1. Основная задача динамики. Понятие состояния в классической механике. Уравнения движения

В динамике изучаются изменения в движении тел, вызванные их взаимодействием. Основная задача динамики для физической системы, находящейся в определенных внешних условиях, найти уравнения движения.

Уравнениями движения называются уравнения, описывающие изменения состояния системы во времени.

В классической механике состояние частицы полностью определяется координатами x, y, z и составляющими скорости v_x, v_y, v_z, т.е. заданием радиуса-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{v}$. Состояние системы из N нерелятивистских частиц описывается радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ и скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$ всех частиц в данный момент времени.

В общем случае уравнение движения системы частиц N может быть представлено выражением

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N\right). \tag{1.17}$$

Вид функции $\vec{f}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N\right)$ зависит от свойств частиц системы и внешних условий, в которых они движутся.

Общее решение уравнения (1.17) может быть найдено, если известны:

1) вид функции $\vec{f}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N\right)$;

2) начальные условия, т.е. значения $\vec{r}$ и $\vec{v}$ в момент времени $t=0$.

1.2.2. Основные законы классической механики. Первый закон Ньютона

В основе классической механики лежат три главных постулата, которые являются обобщением опытных фактов и называются законами Ньютона.

Прежде чем сформулировать первый закон Ньютона, введем понятие свободного тела.

Свободным называется тело, настолько удаленное от всех остальных тел, что их воздействие на него пренебрежимо мало.

Для свободных тел справедлив принцип инерции Галилея или первый закон Ньютона: существуют системы отсчета, в которых свободные тела движутся прямолинейно и равномерно или покоятся. Такие системы отсчета называются инерциальными, а свойство тел сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерного движения в отсутствие внешних воздействий называется свойством инерции или инертностью тел. Принцип инерции фундаментален, область его применения охватывает всю физику.

С понятием свободного тела связано понятие замкнутой или изолированной системы, то есть такой системы частиц, которые не взаимодействуют с внешними телами.

Закон сохранения импульса.
Второй закон Ньютона

Вектор, равный произведению массы m материальной точки на ее скорость $\vec{v}$, называется импульсом точки:

$$\vec{P} = m\vec{v}. \tag{1.18}$$

Импульс системы из N материальных точек равен геометрической сумме импульсов всех точек, входящих в систему:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i . \tag{1.19}$$

Опытным путем установлено, что для замкнутой системы материальных точек справедлив закон сохранения импульса: полный импульс изолированной системы не меняется с течением времени:

$$\vec{P} = \text{const}.$$

Если на систему действуют внешние тела, то $\dfrac{d\vec{P}}{dt} \neq 0$.

В механике для количественной характеристики воздействия одного тела на другое вводится понятие силы: в инерциальной системе производная от импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{1.20}$$

Это утверждение называется вторым законом Ньютона.

Для движений, когда $v \ll c$ и массу можно считать не зависящей от скорости $\vec{v}$, (1.20) перепишется в виде

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

или

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt}, \tag{1.21}$$

т.е. произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на точку силе. Уравнения (1.20) и (1.21) называются уравнениями движения материальной точки (срав. с (1.17)).

Третий закон Ньютона

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух частиц. Дифференцируя по времени полный импульс системы $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ и учитывая закон сохранения импульса, получим:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0. \tag{1.22}$$

Согласно (1.20)

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12}, \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21},$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила, с которой вторая частица действует на первую, а $\vec{F}_{21}$ - сила действия первой частицы на вторую.

Таким образом, из равенства (1.22) следует третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

(1.23)

т.е. две взаимодействующие материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ приложены к разным телам, поэтому они не уравновешивают друг друга.

1.2.3. Центр инерции. Аддитивность массы и закон сохранения центра инерции

Рассмотрим систему N материальных точек (рис 1.8).

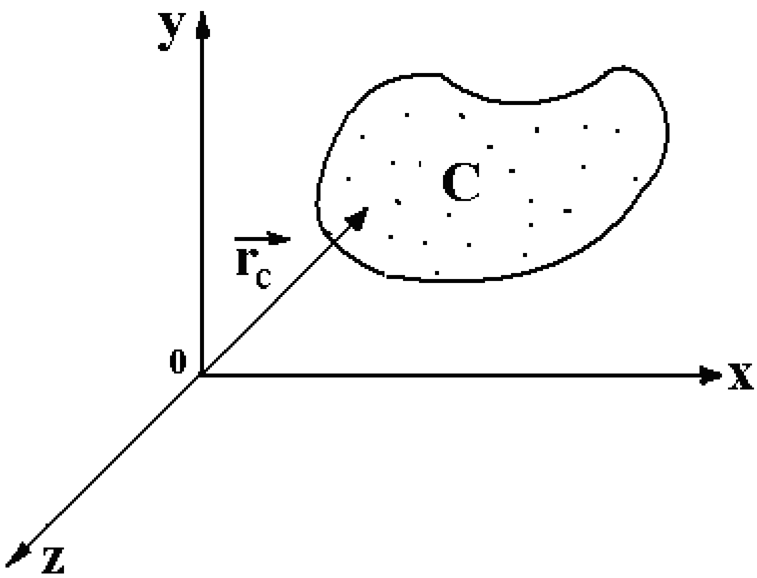

Рис. 1.8

Центром инерции или центром масс системы материальных точек называют такую точку C, радиус-вектор которой равен

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}, \tag{1.24}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - массы и радиус-вектор i-й точки, $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ - масса системы N точек.

Продифференцируем (1.24) по времени:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_c = \frac{d\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{dt\ \ M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \quad . \tag{1.25}$$

Здесь $\vec{v}_c$ - скорость центра инерции, $\vec{P}$ - импульс системы. Для изолированной системы $\vec{P} = \mathrm{const}$ отсюда $\vec{V}_c = \mathrm{const}$, т.е. центр масс изолированной системы движется с постоянной по величине и направлению скоростью.

Это утверждение носит название закона сохранения центра инерции.

При движении любой системы частиц ее центр инерции движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы, действующие на систему. Система отсчета, в которой центр инерции покоится, называется Ц-системой.

Следует обратить внимание на то, что импульс центра инерции связан со скоростью центра инерции так же, как импульс и скорость одной частицы. При этом коэффициент пропорциональности M между импульсом и скоростью центра инерции равен сумме масс отдельных частиц и, очевидно, имеет смысл массы всей системы. В этом выражается закон аддитивности массы.

Теорема о движении центра масс

Если система не изолированна, то

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \tag{1.26}$$

где $\vec{P}$ - импульс системы, $\vec{F}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на систему (внутренние силы попарно компенсируют друг друга).

Преобразуем (1.26) с учетом, что $\vec{P} = M\vec{V}_c$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_c\right) = M\vec{a}_c\,. \tag{1.27}$$

Из (1.27) следует, что центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием силы, равной геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Уравнение (1.27) носит название уравнения движения центра масс.