

### 1.3. Закон сохранения энергии

#### 1.3.1. Механическая работа. Мощность

Для характеристики действия силы, вызывающего перемещение тела, вводят понятие работы.

Обмен механическим движением между телами или переход механического движения в другие формы происходит всегда в результате взаимодействия тел.

Количество передаваемого при этом движения пропорционально произведению силы на перемещение:

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

или в скалярной форме

$$\Delta A = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha. \quad (1.28)$$

Здесь  $\Delta \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$  обозначает скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\Delta \vec{r}$ ,  $\angle \alpha$  - угол между вектором силы и перемещением.

Работа – мера передачи механического движения от одного тела к другому в процессе взаимодействия. Физиологическая работа не совпадает с механической.

Пусть частица под действием силы  $\vec{F}$  совершает перемещение по некоторой траектории 1-2.

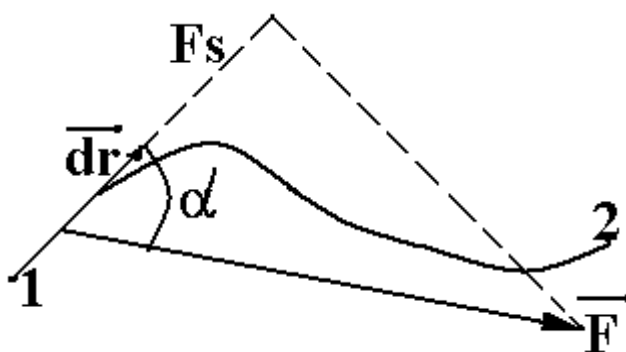


Рис. 1.9

В общем случае сила  $\vec{F}$  в процессе движения частицы меняется как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение  $d\vec{r}$  частицы по траектории АВ, в пределах которого силу  $\vec{F}$  можно считать постоянной ( $\vec{F} = \text{const}$ ). Действие силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$  характеризуют элементарной работой  $dA$ . Элементарной работой  $dA$  силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется скалярное произведение  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ :

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cdot \cos \alpha \cdot ds = F_s \cdot ds, \quad (1.29)$$

где  $\angle \alpha$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  (рис. 1.9),

$ds = |d\vec{r}|$  - элементарный путь,  $F_s$  - проекция силы на вектор перемещения  $d\vec{r}$ .

Величина элементарной работы  $dA$  - алгебраическая (в зависимости от угла  $\alpha$  между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ):

- 1)  $dA > 0$ , если  $\alpha < 90^\circ$ ;
- 2)  $dA < 0$ , если  $\alpha > 90^\circ$ ;
- 3)  $dA = 0$ , если  $\alpha = 90^\circ$ .

Это будет справедливо и для полной работы  $A = \sum_i dA_i$ .

Суммируя выражение (1.29) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до 2, найдем работу силы  $\vec{F}$  на данном участке траектории:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s \cdot ds. \quad (1.30)$$

Выражению (1.30) можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график  $F_s$  как функцию положения частицы на траектории.

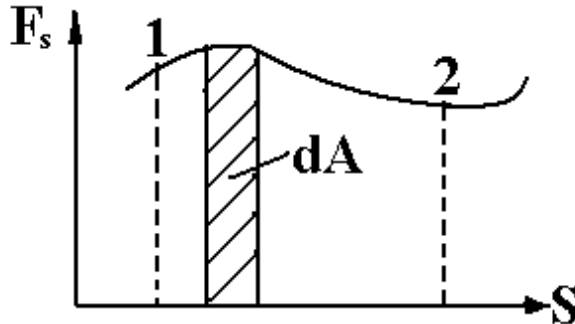


Рис. 1.10

Из рис. 1.10 видно, что элементарная работа  $dA$  численно равна площади заштрихованной полоски, а работа  $A$  на пути от точки 1 до точки 2 – площади фигуры, ограниченной ординатами 1 и 2 и осью  $S$ .

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью.

Работа, совершаемая за единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Среднее значение мощности за промежуток времени  $\Delta t$

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Если сила, совершающая работу, постоянна, то

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.31)$$

### 1.3.2. Кинетическая энергия

Для всесторонней характеристики движения вводится понятие энергии.

Энергия является универсальной мерой различных форм движения. Она количественно характеризует движение с точки зрения возможности его перехода из одной формы в другую.

Кинетическая энергия определяется работой, которую могло бы совершить тело при торможении до полной остановки.

Пусть частица массы  $m$  движется под действием некоторой силы  $\vec{F}$  (в общем случае  $\vec{F}$  может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении  $d\vec{r}$ , сообщая частице ускорение  $\vec{a}$ .

$$\text{Имея в виду, что } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ и } d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt,$$

запишем:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v}. \quad (1.32)$$

Легко показать, что  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v \cdot dv$ , а элементарная работа  $dA$  равна

$$dA = m v dv = d \left( \frac{mv^2}{2} \right). \quad (1.33)$$

Отсюда видно, что работа результирующей силы  $\vec{F}$  идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.34)$$

При некотором конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 = \Delta T, \quad (1.35)$$

т.е. приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении.

### **1.3.3. Консервативные и неконсервативные силы.**

#### **Потенциальная энергия**

В механике различают два вида энергии – кинетическую и потенциальную.

Кинетическая энергия, введенная выше, есть функция состояния, определяемая массами движущихся частиц (или тел) и их скоростями.

Для одной материальной точки

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

для системы материальных точек

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Потенциальная энергия – энергия, зависящая от характера взаимодействия между частицами и обусловленная взаимным расположением частиц тела или тел относительно друг друга.

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + U. \quad (1.36)$$

Чтобы ввести понятие потенциальной энергии, рассмотрим сначала, как зависит работа от формы траектории.

Пусть в некотором поле сил точка перемещается из положения А в положение В сначала по пути А1В, затем по пути А2В (рис. 1.11).

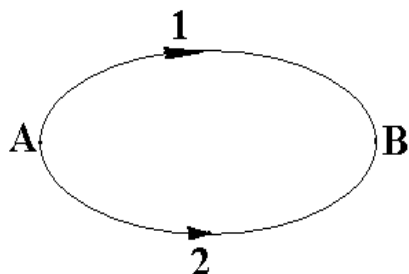


Рис. 1.11

Поля сил, в которых работа не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным положением тела, называются потенциальными, а силы консервативными (или потенциальными).

Консервативными являются силы тяготения, упругости, электростатические силы и т.д.

Поля сил, в которых работа зависит от формы траектории, называются непотенциальными, а силы – неконсервативными (силы трения, сопротивления и т.д.).

В случае консервативных сил вводится понятие потенциальной энергии.

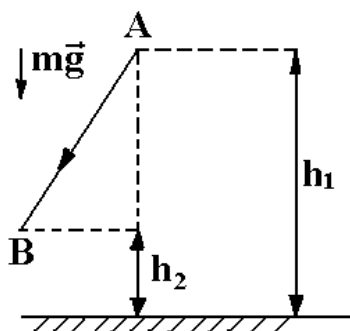


Рис. 1.12

Пусть частица массы  $m$  перемещается из т. А в т. В однородного<sup>1</sup> поля сил тяжести. При этом перемещении силой тяжести совершается работа (рис. 1.12)

$$A = mgS \cos \alpha = mg(h_1 - h_2). \quad (1.37)$$

Работа характеризует переход тела из одного состояния в другое и в данном случае определяется только начальным  $h_1$  и

<sup>1</sup> Поле называется однородным, если в каждой точке его  $\overrightarrow{mg} = \text{const.}$

конечным  $h_2$  положением тела. Естественно считать, что  $mgh_1$  – энергия частицы в начальном положении,  $mgh_2$  – в конечном состоянии. Эту энергию называют потенциальной энергией частицы, поднятой над Землей:

$$U = mgh. \quad (1.38)$$

С учетом (1.39) перепишем (1.37) в следующем виде:

$$\dot{A} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U. \quad (1.39)$$

Из (1.39) следует, что работа в потенциальном поле совершается за счет убыли потенциальной энергии частицы.

Этот вывод, полученный для частного случая однородного поля сил тяжести вблизи поверхности Земли, справедлив для любого потенциального поля.

### 1.3.4. Свойства потенциальных полей

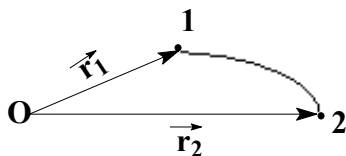
Рассмотрим некоторые свойства потенциальных полей и виды потенциальной энергии.

1. Работа в потенциальном поле по замкнутой траектории равна нулю.
2. Потенциальная энергия системы определяется с точностью до некоторой постоянной.

В самом деле, потенциальная энергия, например, тела в поле тяготения Земли  $U = mgh$ , причем  $h$  может быть отсчитано от поверхности Земли, от центра Земли или какой-нибудь точки. В зависимости от этого меняется значение  $U$ . Поэтому, определяя потенциальную энергию, необходимо условиться, при каком взаимном расположении тел их взаимная потенциальная энергия равна нулю.

3. Связь потенциальной энергии с силой, действующей на данную точку.

Рассмотрим произвольное потенциальное поле  $U(x,y,z)$ , в котором действуют силы  $\vec{F}$ .



Работа по перемещению частицы из т.1 в т.2 (рис. 1.13) силами этого поля равна:

$$dA = -(U_2 - U_1) = -dU.$$

С другой стороны, та же работа запишется в виде:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}.$$

Рис. 1.13

Из сравнения двух предыдущих соотношений получим

$$\vec{F} d\vec{r} = -dU.$$

(1.40) Запишем это равенство в координатах. Как известно,

$$\begin{aligned}\vec{F} d\vec{r} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ -dU &= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz.\end{aligned}$$

Тогда 
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

(1.41)

Вектор с компонентами  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$  называется **градиентом**

**функции**  $U$  и обозначается  $\overrightarrow{\text{grad}U}$ . В векторной форме (1.41) запишется в виде

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}U}.$$

Итак, сила, действующая на материальную точку в потенциальном поле, равна взятому с обратным знаком градиенту потенциальной энергии этой точки в рассматриваемом поле.

Пример 1. Потенциальная энергия упругодеформированного тела.

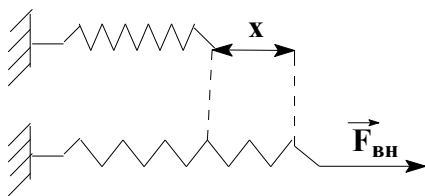


Рис. 1.14

При достаточно медленном растяжении пружины внешней силой  $F_{\text{вн}}$  на величину  $x$  в ней возникает упругая сила  $F_{\text{упр}}$ , которая по закону Гука равна:

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где  $k$  – коэффициент упругости.

Работа, совершаемая силой упругости при возвращении пружины в недеформированное состояние, находится интегрированием:

$$A = \int_x^0 (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2} \Big|_x^0 = \frac{kx^2}{2}.$$

Силы упругости являются потенциальными силами, поэтому

$$A = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1$$

(в недеформированном состоянии потенциальная энергия пружины  $U_2=0$ ).

Отсюда

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (1.42)$$

Пример 2. Потенциальная энергия тяготения.

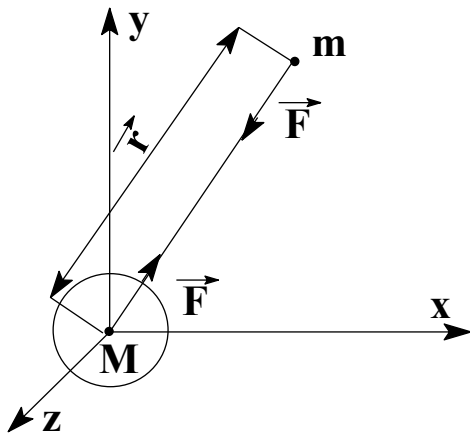


Рис. 1.15

Рассмотрим два тела массами  $M$  и  $m$ , которые взаимодействуют по закону всемирного тяготения:

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

Предположим, что тело  $M$  неподвижно. Работа, совершаемая силой тяготения при приближении тела  $m$  к телу  $M$  от расстояния  $r_1$  до расстояния  $r_2$ , равна:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr.$$

При сближении тел  $dr < 0$ . Учитывая знак  $dr$ , получим:

$$A = -GmM \int_{r_1}^{r_2} d\left(-\frac{1}{r}\right) = -GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Учитывая, что  $A = -\Delta U$ , определим потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух тел  $M$  и  $m$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга:

$$U = -G \frac{mM}{r}. \quad (1.43)$$

Отрицательное значение потенциальной энергии связано с тем, что за начало отсчета  $U$  принято ее значение в бесконечности, где силы взаимодействия между телами  $m$  и  $M$  практически отсутствуют, т.е.  $r = \infty$ ,  $U_\infty = 0$ . При перемещении тела  $m$  из бесконечности в данную точку поля силами тяготения совершается работа за счет убыли потенциальной энергии

этих тел. Следовательно, при любом  $r = \infty$   $U$  должна быть меньше  $U_\infty$ , то есть потенциальная энергия должна быть отрицательной.

Потенциальная энергия тела, находящегося на поверхности Земли ( $r=R$ ), равна:

$$U = -mgR.$$

Потенциальную энергию тела,  $(1 + h/R)^{-1}$  поднятого на небольшую высоту  $h$  ( $h \ll R$ ), можно представить следующим образом:

$$U = -G \frac{mM}{(R+h)} = -G \frac{mM}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)} = -mgR \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}.$$

Разложим выражение  $\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}$  в ряд и отбросим члены второго порядка малости:

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} = 1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \dots \approx 1 - \frac{h}{R}.$$

Тогда

$$U = -mgR + mgh.$$

Полагая потенциальную энергию тела на поверхности Земли равной нулю, получим хорошо известное выражение:

$$U = mgh.$$

### 1.3.5. Закон сохранения энергии в механике.

#### Общефизический закон сохранения

Рассмотрим систему материальных точек и обозначим:

$\vec{F}$  - результирующая всех внешних сил, действующих на систему;

$\vec{f}$  - результирующая всех внутренних консервативных сил;

$\vec{F}_{\text{неконс}}$  - результирующая всех внутренних неконсервативных сил, действующих на материальные точки.

Тогда результирующая всех сил

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F} + \vec{f} + \vec{F}_{\text{неконс}}. \quad (1.44)$$

Умножим (1.44) скалярно на малое перемещение  $d\vec{r}$  :

$$\vec{F}_{\text{рез}} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} + \vec{f} d\vec{r} + \vec{F}_{\text{неконс}} d\vec{r}. \quad (1.45)$$

Выясним физический смысл всех величин, входящих в (1.45):

$\vec{F}_{\text{рез}} d\vec{r} = dA$  - работа результирующей силы, которая, как было установлено ранее, равна приращению  $dT$  кинетической энергии системы:

$$\vec{F}_{\text{рез}} d\vec{r} = dT;$$

$$\vec{F} d\vec{r} = dA_{\text{внеш}} - \text{работа внешних сил};$$

$\vec{f} d\vec{r} = dA$  - работа консервативных сил, равная убыли потенциальной энергии системы:

$$\vec{f} d\vec{r} = -dU;$$

$$\vec{F}_{\text{неконс}} d\vec{r} = dA_{\text{неконс}} - \text{работа неконсервативных сил}.$$

Перепишем (1.45) в виде:

$$dT = dA_{\text{внеш}} - dU + dA_{\text{неконс}}$$

или

$$d(T + U) = dA_{\text{внеш}} + dA_{\text{неконс}}. \quad (1.46)$$

Принимая во внимание, что  $T + U = E$ , где  $E$  - полная энергия системы, получим:

$$dE = dA_{\text{внеш}} + dA_{\text{неконс}}.$$

Если система замкнута, то на нее внешние силы не действуют и  $dA_{\text{внеш}} = 0$ , тогда

$$dE = dA_{\text{неконс}}.$$

Если в системе не действуют неконсервативные силы, например силы трения, то  $dA_{\text{неконс}} = 0$  и  $dE = 0$ , т.е.

$$T + U = \text{const}. \quad (1.47)$$

Соотношение (1.47) – математическая формулировка **закона сохранения механической энергии**: полная энергия замкнутой механической системы при отсутствии неконсервативных сил не меняется с течением времени.

Однако в реальных системах отдельно взятая механическая энергия не сохраняется. В любой реальной системе при движении тел возникают силы трения, которые являются неконсервативными силами. В этом случае  $dE = dA_{\text{неконс}}$ , и полная механическая энергия такой системы убывает. Но при этом механическая энергия переходит в различные виды немеханической энергии, например, в энергию теплового движения, т.е. во внутреннюю энергию среды, в которой происходит движение.

Поэтому рассмотренный нами закон сохранения и превращения механической энергии является частным случаем всеобщего физического закона сохранения и превращения энергии.

### **1.3.6. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий центральные удары**

Абсолютно упругий центральный удар подчиняется закону сохранения импульса и закону сохранения механической энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2,$$
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v'_2)^2}{2}.$$

Абсолютно неупругий центральный удар – удар, при котором после соударения тела движутся совместно с общей скоростью  $\vec{V}_{\text{общ}}$

; выполняется закон сохранения импульса, но не выполняется закон сохранения механической энергии (часть энергии переходит в тепловую):

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{общ}},$$
$$\left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \left( \frac{(m_1 + m_2) v_{\text{общ}}^2}{2} \right) = Q,$$

$$Q = T_1 - T_2,$$

где  $Q$  - выделившееся после соударения тепло;

$T_1$  - кинетическая энергия тел до соударения;

$T_2$  - кинетическая энергия тел после соударения.