

5 Перемещение при изгибе. Аналитический метод. Интеграл Мора. Способ Верещагина. Примеры расчета перемещений.

5.1.1 Основные понятия.

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок называемой **упругой линией**.

При этом точки оси получают поперечные перемещения (y), а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей на угол (θ) Рис. 5.1.

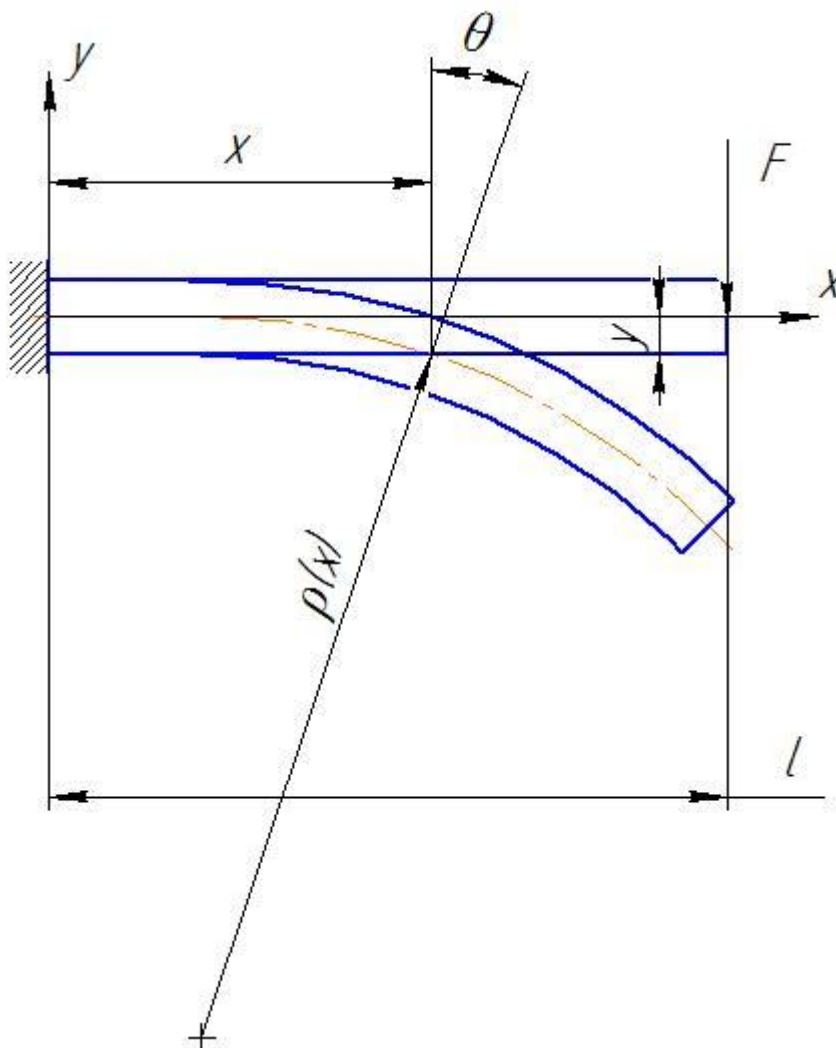


Рис. 5.1 – Изгиб

Перемещение и угол поворота сечения связаны зависимостью

$$(5.1) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad (5.1)$$

В пределах упругих деформаций углы поворота поперечных сечений $\theta \leq 1^\circ$, поэтому принимают $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, тогда

$$(5.1/) \quad \theta = \frac{dy}{dx} \quad (5.2)$$

Дисциплина сопротивление материалов рассматривает детали до их разрушения, поэтому основными свойствами упругой линии являются **плавность и неразрывность**.

Интенсивность деформации изгиба элемента балки длиной dx (Рис. 5.1) определяется искривлением продольной оси $\frac{1}{\rho(x)}$.

Между искривлением продольной оси и изгибающим моментом имеется связь, которая отражается следующей зависимостью:

$$(5.2) \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (5.3)$$

где ρ - радиус кривизны,

$M_z(x)$ – Изгибающий момент в сечении к координатой x ,

E – модуль упругости,

I_z – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Z .

Из курса математического анализа известно, что кривизна плоской кривой $y(x)$ выражается следующей формулой:

$$(5.3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4)$$

Ограничимся рассмотрением случая малых перемещений, в этом случае y' близок к нулю и отношение (5.4) примет вид:

$$(5.4) \quad \frac{1}{\rho} = y'' \quad (5.5)$$

Однако, стоит отметить, что выводы, сделанные на основании отношения (5.5) справедливы только для случая малых перемещений.

5.1.2 Аналитический метод определения перемещений.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии может быть получено на основании зависимостей (5.3) и (5.5) и имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (5.6)$$

Двукратным интегрированием уравнения (5.6) получают уравнения искомых перемещений (угла поворота и прогиба):

$$EI_z \frac{dy}{dx} = \int_l M_z(x) dx + C \quad (5.7)$$

$$EI_z y = \int_l \left[\int_l M_z(x) dx + C \right] dx + D \quad (5.8)$$

где (5.7) – уравнение углов поворота;

(5.8) – уравнение прогибов.

Постоянные интегрирования C и D определяют из граничных условий: в сечении с жесткой заделкой угол поворота и прогиб равны нулю; в сечении с шарнирной опорой прогиб равен нулю.

Физический смысл постоянных интегрирования:

первая постоянная интегрирования C равна значению угла поворота в начале координат, увеличенная в EI_z раз;

вторая постоянная интегрирования D равна прогибу балки в начале координат, увеличенная в EI_z раз;

Для каждого участка составляется свое уравнение изгибающих моментов, следовательно в результате интегрирования для каждого участка получаем уравнения (5.7) и (5.8), со своими постоянными C и D , что значительно осложняет решение задачи.

Для упрощения нахождения уравнения **упругой линии** балки разработан **метод уравнивания постоянных интегрирования**. Метод позволяет добиться равенства постоянных C и D на всех расчетных участках. Метод заключается в соблюдении определенных условий (условий Клебша):

- 1) Начало координат выбирают на одном из концов балки и отсчет координаты x для всех расчетных участков ведут от этого начала координат.
- 2) Выражения изгибающего момента, составленные для первого участка сохраняют неизменными, для всех последующих расчетных участков балки.
- 3) Вновь вводимые выражения изгибающего момента для последующих участков балки записывают с множителем $\langle -a \rangle$, где a – сумма длин предыдущих расчетных участков балки.
- 4) Если на границе участков приложен сосредоточенный момент, то в уравнение изгибающего момента его записывают с множителем $\langle -a \rangle$.
- 5) Если равномерно распределенная нагрузка на границе некоторого участка заканчивает свое действие, то в выражение изгибающего момента для последующего участка записывают слагаемое, учитывающее ее вычитание.
- 6) Интегрируют уравнения по переменной x на первом участке и $\langle -a \rangle$, без раскрытия скобок, на всех последующих расчетных участках балки.

Правило знаков для перемещений: при выборе начала координат на левом конце балки прогиб считают положительным, если он произошел в положительном направлении оси y ; угол поворота, противоположный движению часовой стрелки, считают положительным. Если начало координат

выбрано на правом конце балки, то правило знаков для углов поворота меняется на противоположное, для прогибов – сохраняется.

Определение перемещений в балке проводят с целью проверки ее жесткости.

Условие жесткости имеет вид

$$|y_{max}| \leq y \quad (5.9)$$

где $|y_{max}|$ – максимальный прогиб,

y – допускаемый прогиб,

Если значение допускаемого прогиба не указано то его можно найти из соотношений:

Для пролета – $[y]_{пр} = l_{пр}/750$, где $l_{пр}$ – длина пролета.

Для консоли – $[y]_к = l_к/350$, где $l_к$ – длина консоли.

Найти величину прогиба можно и другими способами, наибольшее распространение получили **интеграл Мора** и **метод Верещагина**.

5.1.3 ИНТЕГРАЛ МОРА

Интеграл Мора может быть получен разными путями. Рассмотрим способ на основе работ внешних сил A и потенциальной энергии, накопленной в деформируемой балке.

Определим прогиб в точке C оси балки, нагруженной некоторой системой внешних сил, для упрощения представим систему сил в виде действия одной сосредоточенной силы. Обозначим через δ_{pp} прогиб в направлении силы P от силы P , а δ_{cp} прогиб в точке C от действия силы рис. Рис. 5.2 – Интеграл Мора.

При статическом приложении сила P произведет работу:

$$A = \frac{P \cdot \delta_{pp}}{2} \quad (5.10)$$

где A – работа силы P .

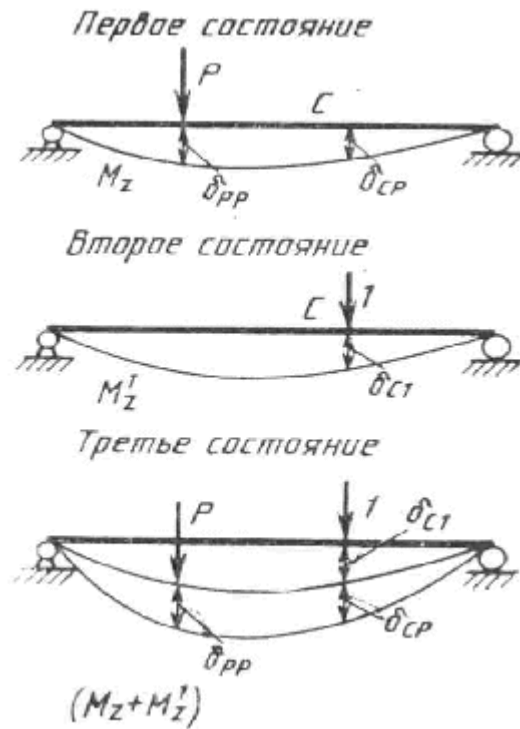


Рис. 5.2 – Интеграл Мора

Потенциальная энергия деформации для первого состояния

$$U = \int_l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (5.11)$$

где M_z – изгибающий момент от приложенных сил.

Составляя баланс энергии $A=U$, получим:

$$\frac{P \cdot \delta_{PP}}{2} = \int_l \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (5.12)$$

Рассмотрим состояние, когда в точке С приложена единичная сила (Рис. 5.2), составим уравнение баланса энергии:

$$\frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} = \int_l \frac{M_z^1}{2EI_z} dx \quad (5.13)$$

где M_z^1 – изгибающий момент от приложенных сил.

Рассмотрим состояние, когда приложены оба, рассмотренных ранее фактора. Приложение к единичной силе дополнительного усилия P вызовет дополнительные деформации балки, причем согласно принципу, независимости действия сил дополнительные прогибы будут такими же, как и в первом рассматриваемом случае. Запишем уравнение работ:

$$A = \frac{1 \cdot \delta_{C1}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{PP}}{2} + 1 \cdot \delta_{CP} \quad (5.14)$$

У последнего слагаемого множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует потому, что к моменту приложения заданной нагрузки единичная сила достигла своего конечного значения и в процессе перемещения δ_{cp} величины своей не изменяет.

Изгибающие моменты для третьего случая равны суммам изгибающих моментов от заданных нагрузок и от единичной силы, а потенциальная энергия деформаций:

$$U = \int_l \frac{M_z \curvearrowright M_z^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx = \int_l \frac{M_z \curvearrowright}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z \curvearrowright \cdot M_z^1 \curvearrowright}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_z^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx \quad (5.15)$$

Баланс энергий в третьем состоянии

$$\begin{aligned} \frac{l \cdot \delta_{cl}}{2} + \frac{P \cdot \delta_{pp}}{2} + 1 \cdot \delta_{cp} = \\ = \int_l \frac{M_z \curvearrowright M_z^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx = \int_l \frac{M_z \curvearrowright}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z \curvearrowright \cdot M_z^1 \curvearrowright}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_z^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx \end{aligned} \quad (5.16)$$

Учитывая балансы энергии в **первом** и **втором** состояниях получим:

$$\int_l \frac{M_x^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z \curvearrowright}{2EI_z} dx + 1 \cdot \delta_{cp} = \int_l \frac{M_z \curvearrowright}{2EI_z} dx + \int_l \frac{M_z \curvearrowright \cdot M_x^1 \curvearrowright}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_x^1 \curvearrowright}{2EI_z} dx,$$

после упрощения:

$$1 \cdot \delta_{cp} = \int_l \frac{M_z \curvearrowright \cdot M_z^1 \curvearrowright}{EI_z} dx \quad (5.17)$$

Чтобы левая часть равенства содержала только прогиб, исключим единичную силу, разделив обе части на вспомогательную единичную силу.

$$\delta_{cp} = \int_l \frac{M_z \curvearrowright \cdot M_z^1 \curvearrowright}{EI_z} dx \quad (5.18)$$

Задача определения угла поворота сечения С приводит к тому же выражению. При выводе отличие заключается в том, что вместо единичной силы прикладывается единичный момент.

Итак, прогибы и углы поворотов сечений балок могут быть найдены из равенства называемого интегралом Мора(5.18).

Для определения $M_z^1(x)$ надо снять с балки заданную нагрузку и приложить в заданном сечении единичную нагрузку или момент в направлении этого перемещения. Моменты $M_z^1(x)$ и $M_z(x)$ надо подставить в интеграл Мора с их знаками. Положительный знак означает совпадение направление перемещение с направлением приложенной единичной силы.

5.1.4 Правило Верещагина

«Интеграл произведения двух функций, из которых одна линейная, а другая – произвольная, равен площади произвольной функции, умноженной на ординату из прямоугольной функции, лежащей под центром тяжести площади произвольной функции».

Пусть на участке длиной l грузовая эпюра ограничена функцией $f_1(z)$, единичная эпюра – функцией $f_2(z)$.

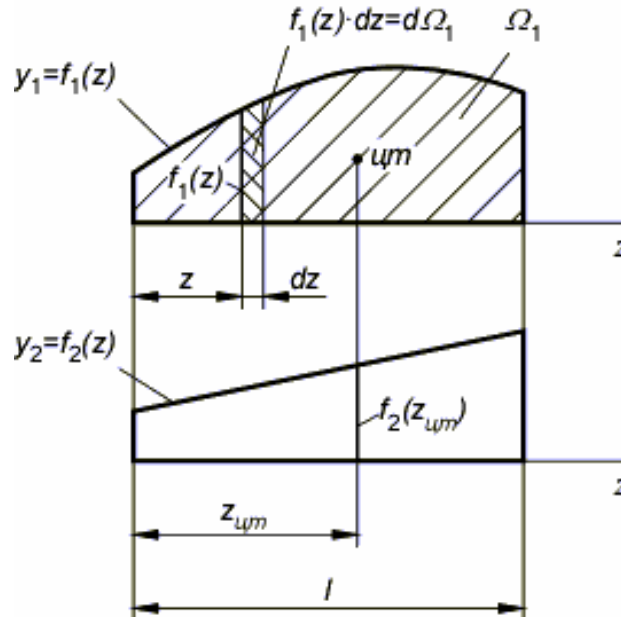


Рис. 5.3 – Метод Верещагина

Рассмотрим интеграл вида:

$$I = \int_0^l f_1(z) f_2(z) dz \quad (5.19)$$

Поскольку функция $f_2(z)$ всегда является линейной, то есть $f_2(z) = b + kz$, то

$$I = \int_0^l f_1(z) (b + kz) dz = b \int_0^l f_1(z) dz + k \int_0^l f_1(z) z dz \quad (5.20)$$

Учитывая, что площадь грузовой эпюры равна $\Omega = \int_0^l f_1(z) dz$, можно записать

$$I = b\Omega_1 + k \int_0^l z \cdot d\Omega_1 \quad (5.21)$$

где интеграл $\int_0^l z \cdot d\Omega_1$

представляет собой статический момент площади грузовой эпюры относительно оси u и может быть вычислен

$$\int_0^l z \cdot d\Omega_1 = \Omega_1 z_{u.m.} \quad (5.22)$$

где $z_{ц.т.}$ - абсцисса точки центра тяжести грузовой эпюры.

Окончательно получаем

$$I = b\Omega_1 + k\Omega_1 z_{u.m.} = \Omega_1 (b + k \cdot z_{u.m.}) = \Omega_1 f_2(z_{u.m.}) \quad (5.23)$$

Таким образом, по правилу Верещагина интеграл Мора определяется как произведение площади грузовой эпюры Ω_1 на расположенную под центром тяжести грузовой эпюры ординату единичной эпюры $f_2(z_{ц.т.})$, отнесенное к жесткости поперечного сечения EJ_x . Если грузовая эпюра является линейной, то произведение в формуле Верещагина обладает свойством коммутативности.

Пример 1

Определить перемещение среднего сечения консольной балки Рис. 5.4:

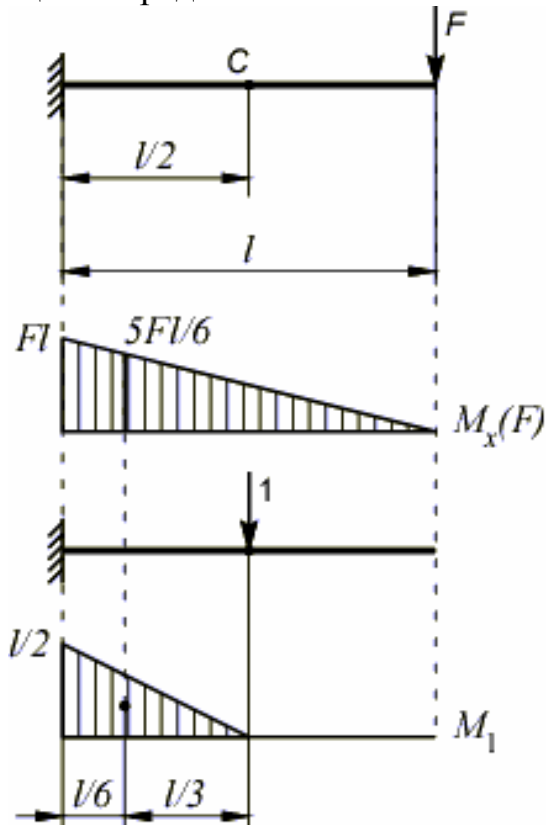


Рис. 5.4 – Пример 1

Поскольку обе эпюры являются линейными, при вычислении способом Верещагина возьмем площадь единичной эпюры и ординату грузовой эпюры, соответствующую положению точки центра тяжести единичной эпюры:

$$\delta_c = \frac{1}{EJ_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \left(F \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) \right) = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{5Fl}{6} \quad (5.24)$$

Пример 2

Определим прогиб Δ_C конца консоли (Рис. 5.5).

Построим грузовую эпюру моментов и эпюру изгибающих моментов от единичной силы, приложенной на конце консоли (Рис. 5.5). Используя правило Верещагина, имеем:

$$\Delta_C = \frac{A_{MF} y_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Fl \cdot l \right) \cdot \left(\frac{2}{3} l \right) = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

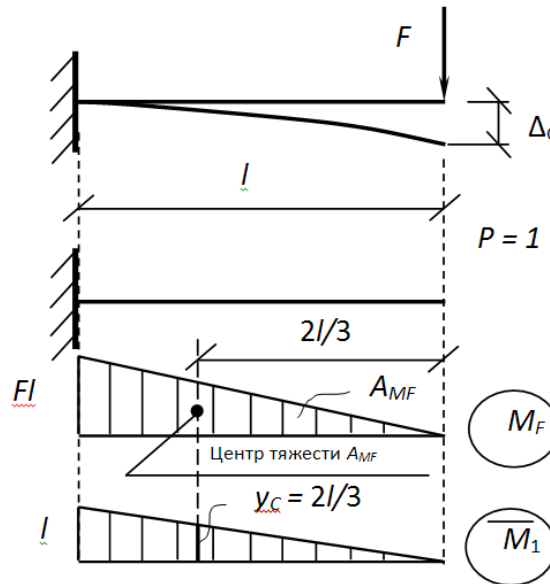


Рис. 5.5 – Пример 2

Пример 3

Пусть дана балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой q (Рис. 5.6). Вычислим прогиб балки в точке С при ее изгибной жесткости $EI = \text{const}$.

При расчете учитываем только влияние изгибающих моментов, поэтому принимаем интеграл Мора в виде:

$$\Delta_C = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dx = \frac{A_{MF} y_C}{EI},$$

$$\text{где } M_F = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}, \quad \bar{M}_1 = \frac{x}{2},$$

$$A_{MF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{24},$$

$$y_C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{3}{16} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5l}{16} \right) = \frac{5}{32}l.$$

Вычисляем перемещение Δ_C при помощи интеграла Мора:

$$\Delta_C = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

Вычисляем перемещение Δ_C при помощи интеграла Мора, но с использованием правила перемножения эпюр Верещагина:

$$\Delta_C = \frac{A_{MF} y_C}{EI} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

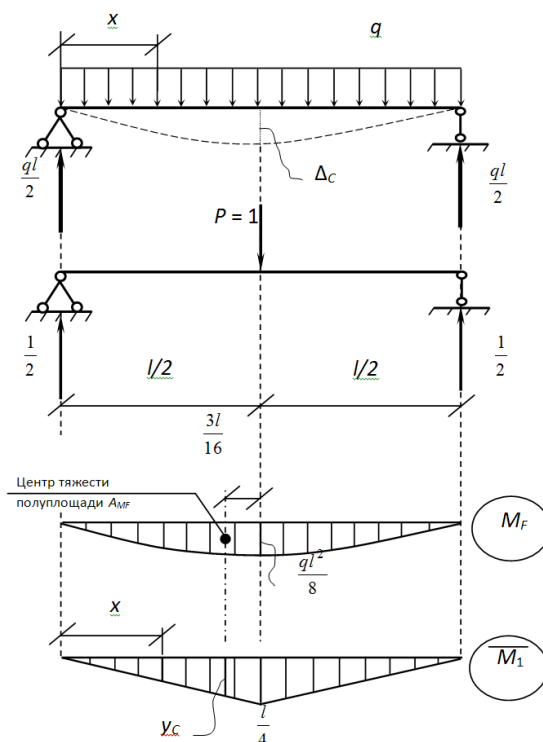


Рис. 5.6 – Пример 3

На Рис. 5.7 приведены формулы для определения площадей стандартных фигур и расположения центра масс.

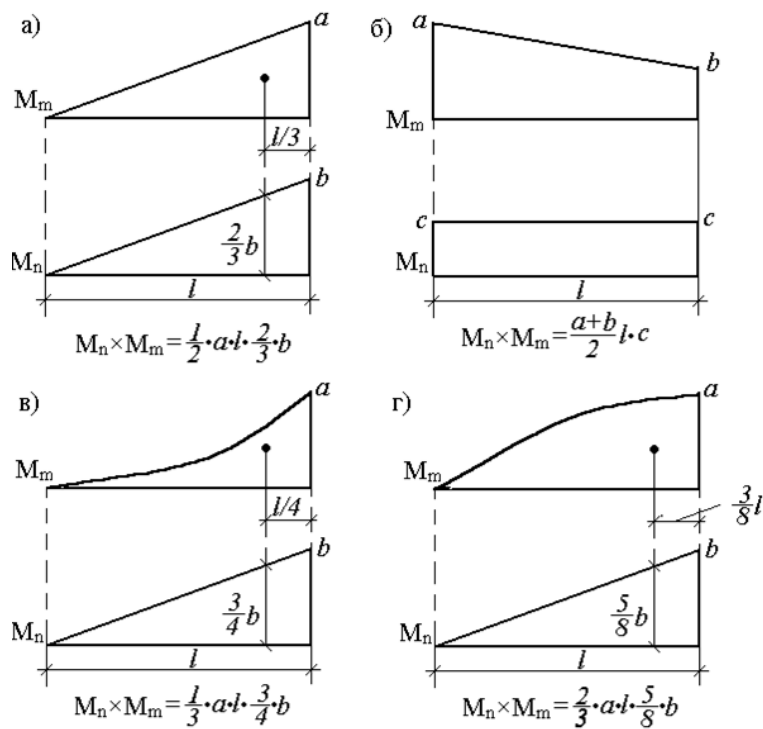


Рис. 5.7 – Площади и центры масс стандартных фигур

5.2 Нормальные напряжения при чистом изгибе

Для определения напряжений возникающих в балке рассмотрим три задачи.

1. Статическая сторона задачи.

Воспользуемся интегральными уравнениями равновесия **Ошибка! Источник ссылки не найден., Ошибка! Источник ссылки не найден. и Ошибка! Источник ссылки не найден.:**

$$N = \int_A \sigma dA, M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA, M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA, \quad (5.25)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Вырежем из балки элемент длиной dz . После приложения нагрузки он выглядит следующим образом:

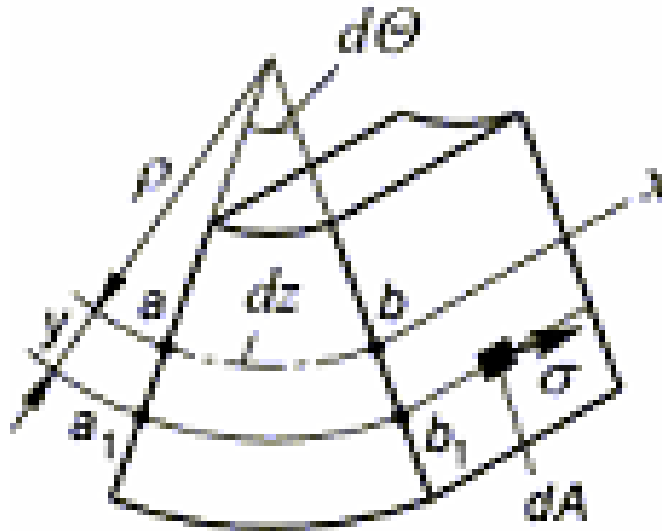


Рис. 5.8 – Элемент балки

где ρ - радиус нейтральной линии. Нейтральной линией называется след нейтрального слоя, разделяющего балку на области растяжения и сжатия.

$d\theta$ - угол поворота сечения.

$ab = dz$ – длина нейтральной линии для выбранного элемента.

Выделим волокно длиной a_1b_1 на расстоянии y от нейтральной линии. До деформации его длина равнялась ab . Относительное изменение длины волокна:

$$\varepsilon_{a_1b_1} = \frac{a_1b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\Theta - \rho d\Theta}{\rho d\Theta} = \frac{y}{\rho} \quad (5.26)$$

3. Физическая сторона задачи.

Запишем закон Гука в напряжениях и деформациях:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.27)$$

Подставим выражение (5.26) в формулу(5.27):

$$\sigma = Ey \frac{1}{\rho} \quad (5.28)$$

Тогда из (5.26):

$$M_x = \int_A Ey^2 \frac{1}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (5.29)$$

Учитывая определение **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (5.30)$$

Произведение EJ_x называется жесткостью поперечного сечения при изгибе.

Подставим (5.30) в (5.28):

$$\sigma = Ey \frac{M_x}{EJ_x} = \frac{M_x y}{J_x}$$

Таким образом, абсолютная величина напряжения тем выше, чем больше расстояние y от нейтральной линии. Максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_{\max}}{J_x}$$

где $y_{\max}$ – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения.

Введем следующее обозначение:

$$\frac{J_x}{y} = W_x - \text{ момент сопротивления, тогда условие прочности при}$$

чистом изгибе можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

Для отыскания положения нейтральной линии в области поперечного сечения привлечем оставшиеся два интегральных уравнения равновесия (5.25):

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E}{\rho} y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0,$$

откуда $S_x=0$, т.е. ось x является центральной.

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = \int_A \frac{E}{\rho} yx \cdot dA = \\ &= \frac{E}{\rho} \int_A yx \cdot dA = \frac{E}{\rho} J_{xy} = 0 \end{aligned}$$

откуда $J_{xy}=0$, т.е. ось x – главная.

Вывод: нейтральная линия является главной центральной осью поперечного сечения.

Для случая прямоугольного сечения можно утверждать, что ось x – нейтральная.

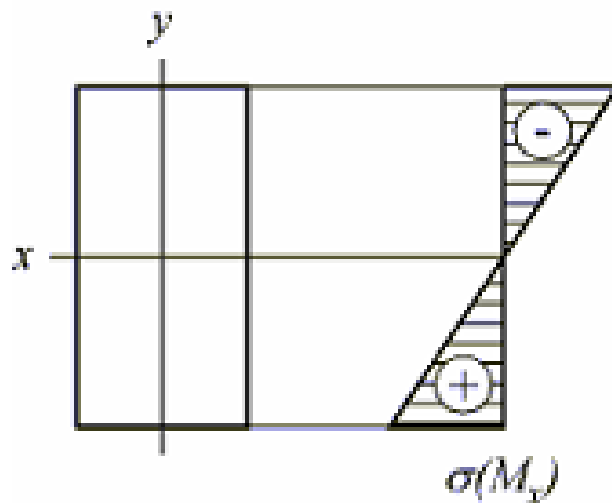


Рис. 5.9 – Нейтральная ось прямоугольника.

Таким образом, в отличие от случая растяжения-сжатия, где напряжение постоянно в любой точке поперечного сечения, при чистом изгибе напряжение по высоте сечения изменяется по линейному закону.

5.3 Особенности расчета на прочность балок из пластичных и хрупких материалов

При проектировании элементов конструкции, работающих на изгиб целесообразно использовать сечения с размерами, удовлетворяющими условиям:

$$\sigma_{\max} = [\sigma]_{\text{с}} \dots \sigma_{\max} = [\sigma]_{\text{р}}$$

где $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\max}$ – напряжения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках сечения, соответственно для сжатой и растянутой его части.

Пластичный материал

Для пластичного материала $[\sigma]_{\text{р}} = [\sigma]_{\text{с}}$. В данном случае рационально использовать симметричные профили (при этом $\sigma_{\max} = \sigma_{\max}$).

Экономичными являются профили с уменьшенной металлоемкостью в области нейтральной линии, такие как двутавр и швеллер. Показателем экономичности является удельный момент сопротивления

$$\omega_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}$$

Чем выше величина w_x , тем профиль более экономичен.

Для круга $w_x = 0,141$.

Для кольца $d/D = 0,7$ $w_x = 0,294$.

Для двутавра №10 $w_x = 0,955$.

Для двутавра №20 $w_x = 1,33$

Сечение следует располагать таким образом, чтобы силовой фактор действовал в плоскости максимальной жесткости.

Случай 2 более выгодный, т.к. $W_x^{\text{с}} \geq W_x^{(1)}$

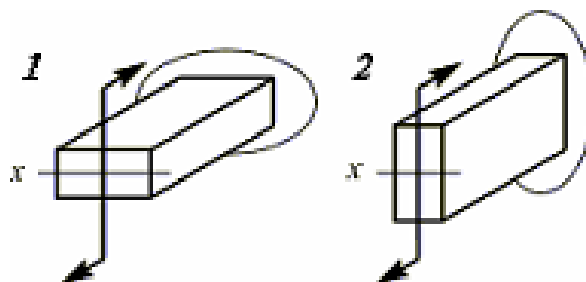


Рис. 5.10 – Варианты расположения сечений

Простое увеличение размеров сечения не всегда эффективно. Так, если у круглого сечения вырезать сегменты высотой в пределах $0,11d$, получится более экономичный профиль, чем сплошной круг.

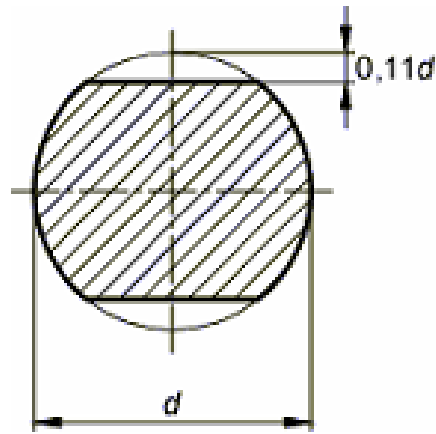


Рис. 5.11 – Круг с вырезанными сечениями

Хрупкий материал

Для хрупкого материала $\frac{R_c}{R_p} > 0$, поэтому в данном случае целесообразно использовать несимметричные относительно нейтральной линии профили, например, тавровый:

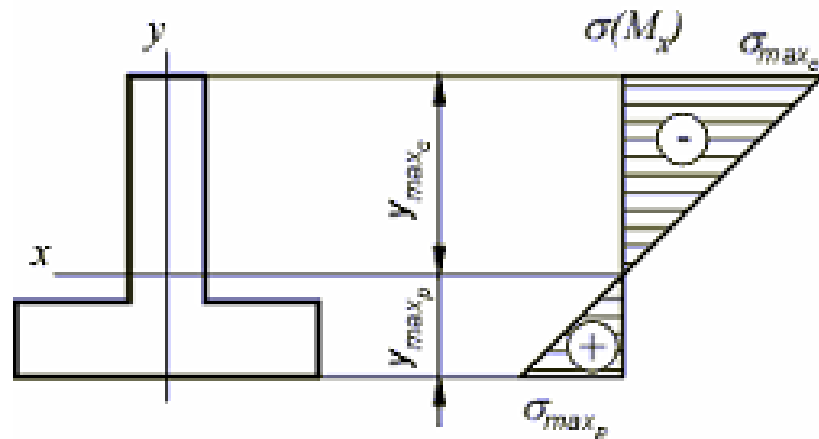


Рис. 5.12 – Напряжения в тавровом профиле

Размеры поперечного сечения должны удовлетворять двум условиям:

$$\sigma_{\max c} = \frac{M_x y_{\max c}}{J_x} \leq [R_c] \quad (5.31)$$

$$\sigma_{\max p} = \frac{M_x y_{\max p}}{J_x} \leq [R_p] \quad (5.32)$$

Из подобия треугольников эпюры $\sigma(M_x)$ следует, что

$$\frac{\sigma_{\max c}}{\sigma_{\max p}} = \frac{y_{\max c}}{y_{\max p}}.$$

Если $\frac{\sigma_{\max c}}{\sigma_{\max p}} > \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}$, опасными являются сжатые волокна и расчет на прочность следует вести по формуле (5.31).

Если $\frac{\sigma_{\max c}}{\sigma_{\max p}} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}$, опасными являются растянутые волокна и расчет на прочность следует вести по формуле (5.32).

5.4 Определение касательных напряжений в случае прямого поперечного изгиба

Изгиб называется поперечным, если кроме изгибающего момента в сечениях элемента конструкции возникает поперечная сила.

Если при чистом изгибе поперечные сечения балки остаются плоскими, то при поперечном они искривляются, т.е. в данном случае гипотеза Бернулли не применима.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную на свободном конце силой F .

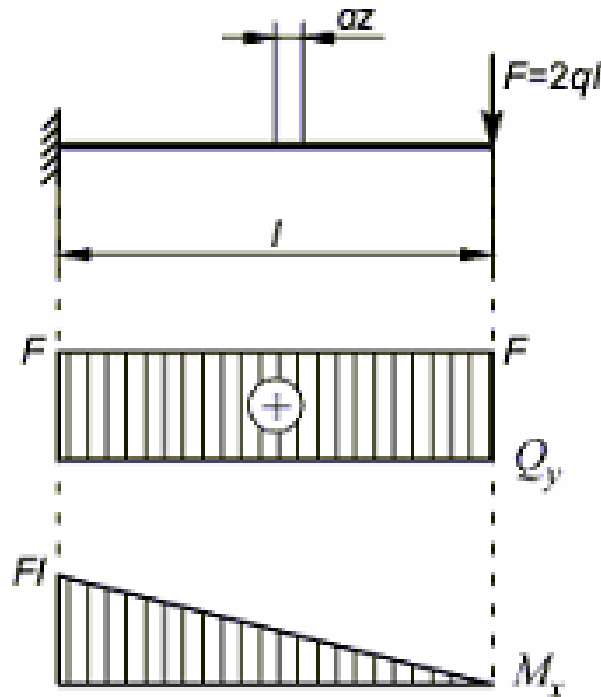


Рис. 5.13 – Консольная балка

Вырежем элементарный участок балки длиной dz . На торцевых площадках этого элемента действуют вызванные поперечными силами касательные напряжения. Примем закон распределения касательных напряжений по ширине сечения равномерным.

Плоскостью, параллельной нейтральному слою и отстоящей от него на расстояние y , отсечем часть рассматриваемого элемента с площадью торца

А*. Докажем наличие на нижней грани отсеченной части касательных напряжений.

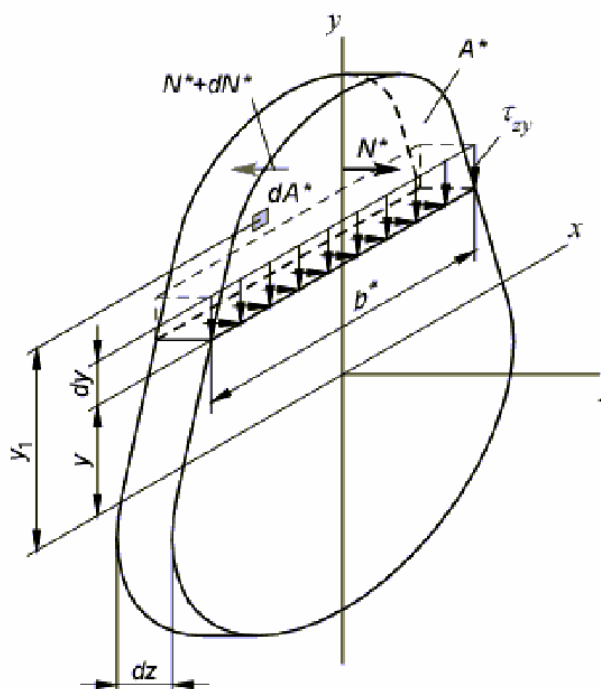


Рис. 5.14 – Элемент dz

Рассмотрим элемент отсеченной части высотой dy.

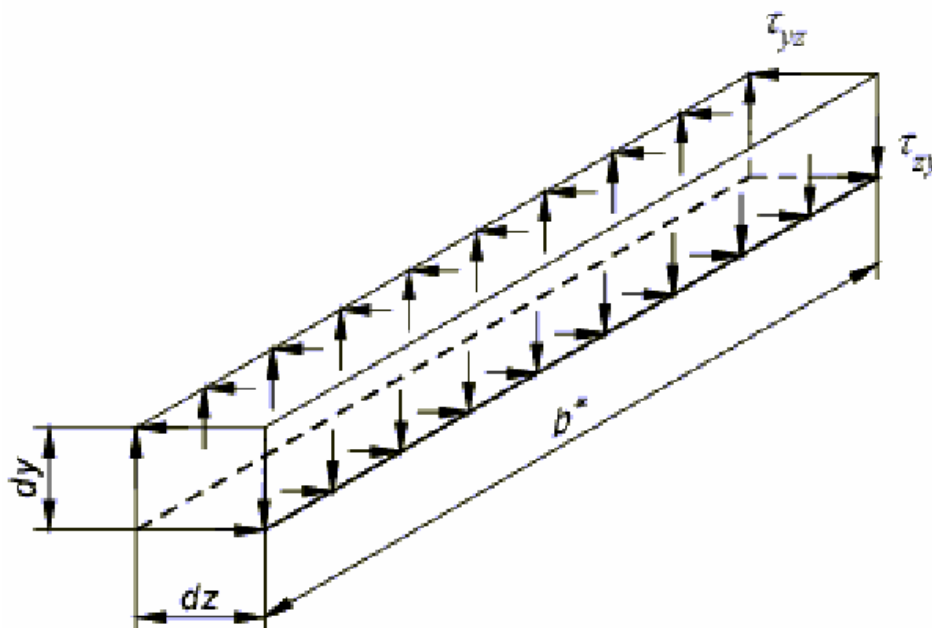


Рис. 5.15 – Отсеченный элемент

Из условий равновесия этого элемента можно заключить, что касательные напряжения действуют не только в поперечных, но и в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою.

Запишем сумму моментов, вызванных действием касательных напряжений, относительно оси x:

$$\tau_{zy} b^* \cdot dy \cdot dz = \tau_{yz} b^* \cdot dz \cdot dy$$

Откуда

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Это так называемый закон парности касательных напряжений: на взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и противоположные по направлению касательные напряжения.

Обозначим N^* равнодействующую нормальных напряжений, действующих на одном из торцов отсеченного участка A^* . Равнодействующая нормальных напряжений, действующих на противоположном торце, равна $N^* + dN^*$.

Воспользуемся интегральным уравнением равновесия **Ошибка!**
Источник ссылки не найден.

$$N = \int_A \sigma dA,$$

и формулой для нормального напряжения

$$\sigma = \frac{M_x y_1}{J_x},$$

где y_1 – расстояние от нейтрального слоя до элементарной площадки dA^* отсеченной части.

Получим

$$N^* = \int_{A^*} \frac{M_x y_1}{J_x} dA^* = \frac{M_x}{J_x} \int_{A^*} y_1 dA^* = \frac{M_x}{J_x} S_x^*,$$

где S_x^* – статический момент отсеченной части.

Приращение равнодействующей dN^* пропорционально приращению изгибающего момента dM_x на участке dz :

$$dN^* = \frac{dM_x}{J_x} S_x^*$$

Сумма проекций всех сил, действующих на отсеченной части, на ось z

$$\sum F_{i_z}^* = 0:$$

$$N^* + \tau_{yz} \cdot dz \cdot b^* = N^* + dN^*.$$

Откуда

$$\tau_{yz} = \frac{dN}{dz \cdot b^*} = \frac{dM_x \cdot S_x^*}{dz \cdot b^* \cdot J_x}.$$

Учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{dN}{dz \cdot b^*} = \frac{Q \cdot S_x^*}{b^* \cdot J_x}.$$

Полученное выражение называется формулой Журавского. В этой формуле:

S_x^* - статический момент части площади поперечного сечения, отсекаемый на том уровне относительно оси изгиба, где определяется величина τ ;

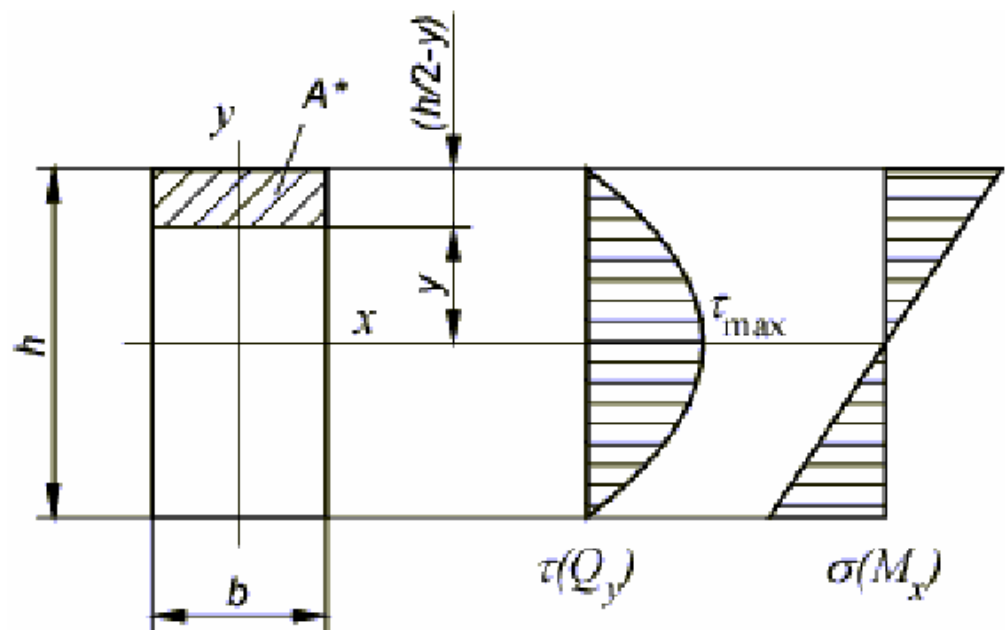
J_x - момент инерции всего сечения относительно оси изгиба;

b^* - ширина поперечного сечения на том уровне относительно оси изгиба, где определяется величина τ .

Формула Журавского справедлива для сечений с отношением высоты к ширине $h/b > 2$.

Искривление поперечных сечений от действия Q_y незначительно влияет на закон нормальных напряжений, поэтому им в инженерных расчетах пренебрегают.

Определим закон изменения τ по высоте сечения для прямоугольного профиля.



Статический момент части сечения, отсекаемой на уровне y от нейтральной линии

$$S_x^* = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right) = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{h^2}{8} + \frac{hy}{4} - \frac{hy}{4} - \frac{y^2}{2}\right)b = \frac{h^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)b$$

Учитывая, что момент инерции для прямоугольника $J_x = \frac{bh^3}{12}$, получим зависимость

$$\tau(y) = \frac{Q_y \cdot \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{\frac{bh^3}{12}b} = \frac{Q_y \cdot 3\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{hb}$$

Определим значения касательных напряжений в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии:

$$\tau\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0.$$

и в точках, лежащих на нейтральной линии:

$$\tau_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A}.$$

Таким образом, касательные напряжения меняются по высоте сечения по квадратичной зависимости, достигая максимума на нейтральной оси.