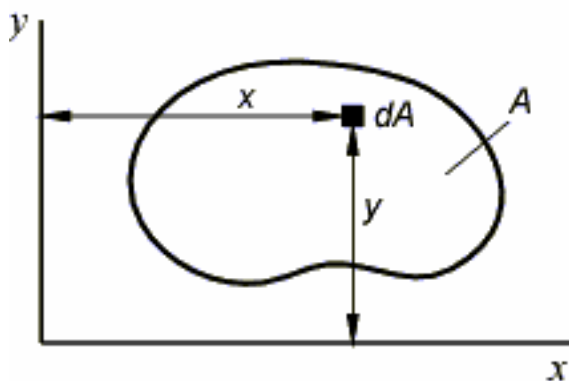


### 3 Геометрические характеристики сечений

#### 3.1 Определение геометрических характеристик плоских сечений

##### 3.1.1 Площадь сечения



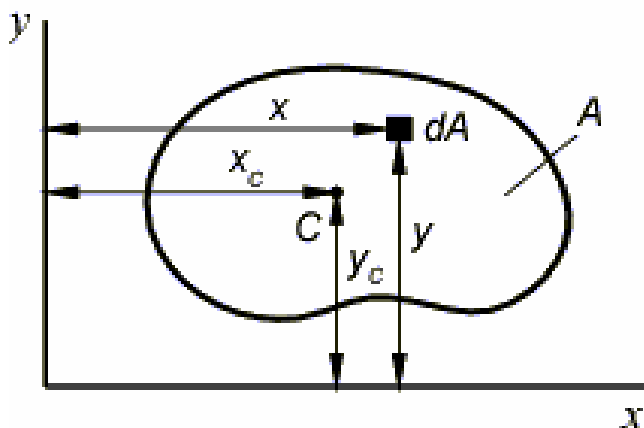
Простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения является площадь  $A$ , которую можно определить:

$$A = \int dA \quad (3.1)$$

где  $dA$  – площадь элементарной площадки.

##### 3.1.2 Статические моменты площади

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью  $A$ . Выделим элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$ .



Интегралы

$$S_x = \int_A y dA; \quad (3.2)$$

$$S_y = \int_A x dA. \quad (3.3)$$

называются статическими моментами площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$ , соответственно.

Пусть точка  $C$  является центром тяжести сечения. Тогда, зная ее координаты, величины статических моментов можно определить:

$$S_x = y_C dA; \quad (3.4)$$

$$S_y = x_C dA. \quad (3.5)$$

Статические моменты используются при определении координат центра тяжести (ЦТ) сложной фигуры.

Алгоритм определения координат ЦТ сложной фигуры

1. Разбить сложную фигуру на простые, положения точек ЦТ которых известны.

2. Задать вспомогательную систему координат, в которой будут определяться координаты точки ЦТ сложной фигуры.

3. Определить статические моменты простых фигур относительно осей вспомогательной системы координат.

4. Определить координаты точки ЦТ по следующим формулам:

$$y_C = \frac{\sum_i S_{xi}}{\sum_i A_i}; \quad (3.6)$$

$$x_C = \frac{\sum_i S_{yi}}{\sum_i A_i}; \quad (3.7)$$

где  $i$  – номер простой фигуры,  $x$  и  $y$  – вспомогательные оси.

### **Пример.**

Определить координаты центра тяжести следующей фигуры Рис. 3.1 – Рисунок к задаче определения центра тяжести сечения Рис. 3.1.

Так как данная фигура имеет ось симметрии (ось  $y$ ), точка ее центра тяжести будет находиться на этой оси.

Разделим фигуру на два прямоугольника с центрами тяжести в точках  $C_I$  и  $C_{II}$ . Выберем вспомогательную ось совпадающей с центром тяжести одной из фигур (ось  $x_{CII}$ ).

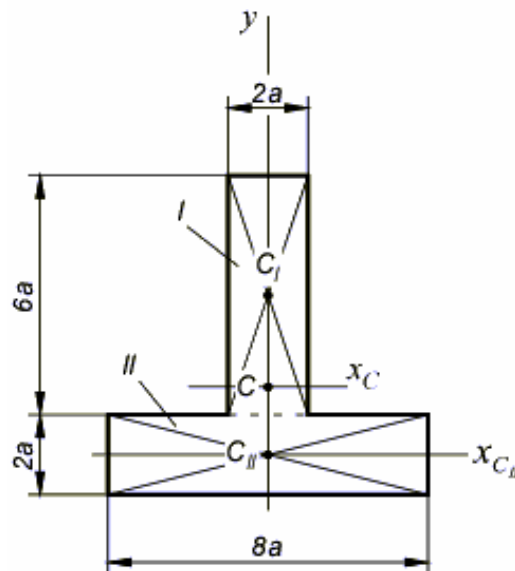


Рис. 3.1 – Рисунок к задаче определения центра тяжести сечения  
 Статический момент вертикального прямоугольника относительно  
 вспомогательной оси  $x_{CII}$ :

$$S_{xCII}^I = A^I \cdot 4a = 12a^2 \cdot 4a = 48a^3; \quad (3.8)$$

Статический момент горизонтального прямоугольника относительно  
 вспомогательной оси  $x_{CII}$ :

$$S_{xCII}^{II} = A^{II} \cdot 0 = 0; \quad (3.9)$$

Координата точки центра тяжести фигуры относительно оси  $x_{CII}$ :

$$y_C = \frac{\sum_i S_{xi}}{\sum_i A_i} = \frac{48a^3}{2a \cdot 8a + 2a \cdot 6a} = 1.71a; \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Моменты инерции

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью  $A$ . Выделим элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$  и радиус-вектором  $\rho$ .

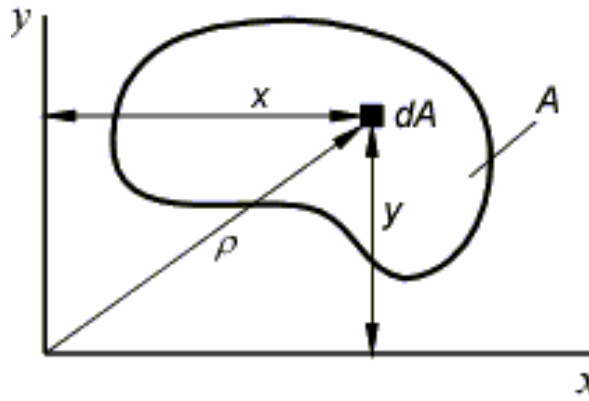


Рис. 3.2 – Момент инерции площади фигуры  
**Осевыми моментами инерции сечения называются интегралы**

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad (3.11)$$

$$J_y = \int_A x^2 dA, \quad (3.12)$$

**Центробежным моментом инерции называется интеграл**

$$J_{xy} = \int_A xy dA, \quad (3.13)$$

**Полярным моментом инерции называется интеграл**

$$J_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (3.14)$$

Так как  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , то  
 $J_p = J_x + J_y,$

(3.15)

т.е. полярный момент инерции сечения относительно заданной точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

### 3.1.4 Радиусы инерции

Величины, определяемые по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad (3.16)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad (3.17)$$

называются радиусами инерции относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

### 3.2 Основные теоремы о моментах инерции

#### 3.2.1 Теорема о моментах инерции относительно осей, параллельных центральным

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси параллельной данной плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

Центробежный момент инерции сечения относительно произвольных осей координат равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей параллельных данным плюс произведение площади сечения на расстояния между осями.

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью  $A$ . Пусть оси  $x$  и  $y$  являются центральными (т.е. проходящими через центр тяжести сечения), и известны моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ . Требуется определить моменты инерции  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$ ,  $J_{x_1y_1}$  относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ , смещенных параллельно центральным осям на расстояния  $a$  и  $b$  соответственно.

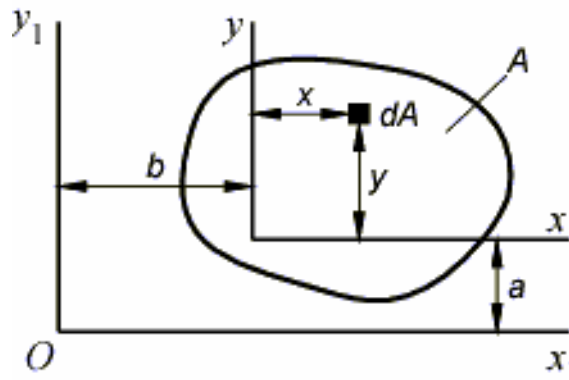


Рис. 3.3 – К теореме о трех моментах

Координаты элементарной площадки  $dA$  в системе координат  $(x_1, y_1)$ :

$$x_1 = x + b; y_1 = y + a \quad (3.18)$$

По определению осевого момента инерции (3.11)

$$J_{x_1} = \int_A (x + b + a)^2 dA = J_x + 2a \int_A y dA + a^2 A, \quad (3.19)$$

где  $\int_A y dA = S_x = 0$ , так как оси  $x$  и  $y$  являются центральными, т.е.

проходящими через центр тяжести площади сечения.

Таким образом,

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A, \quad (3.20)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить

$$J_{y1} = J_y + b^2 A, \quad (3.21)$$

По определению центробежного момента инерции (3.13):

$$J_{xy} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = J_{xy} + abA, \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Вычисление моментов инерций простейших фигур

#### Прямоугольник.

Сначала определим моменты инерции прямоугольника относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ .

Выделим на расстоянии  $y_1$  от оси  $x_1$  элементарную площадку  $dA$  высотой  $dy_1$  и шириной, равной ширине прямоугольника:

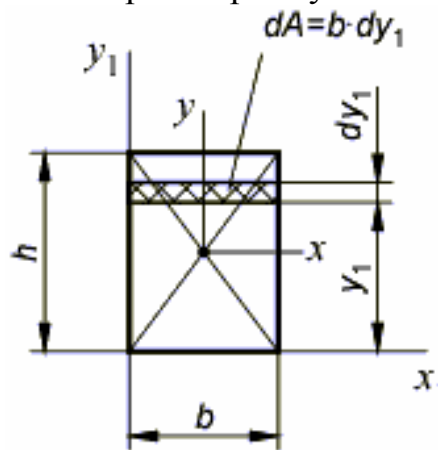


Рис. 3.4 – Момент инерции прямоугольника.

По определению осевого момента инерции (3.11)

$$J_{x1} = \int_A y_1^2 dA.$$

Заменяем интеграл по площади интегралом по высоте

$$J_{x1} = \int_0^h y_1^2 b dy_1 = b \frac{y_1^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично

$$J_{y1} = \int_0^b x_1^2 h dx_1 = h \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^b = \frac{hb^3}{3}.$$

Моменты инерции относительно центральных осей  $x$  и  $y$  определим, пользуясь теоремой о моментах инерции относительно осей, параллельных центральным (3.20) :

$$J_x = J_{x1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично

$$J_y = J_{y1} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3} - \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{12}.$$

### Круг.

Определим полярный момент инерции круга. Выделим на расстоянии  $\rho$  от центра круга элементарный слой  $dA$  толщиной  $d\rho$ .

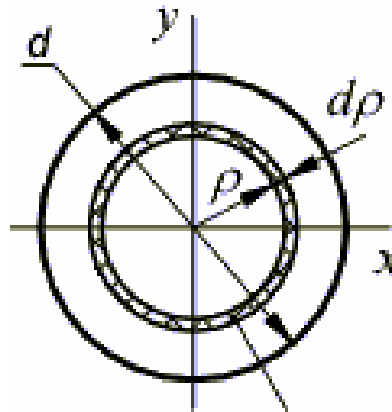


Рис. 3.5 – Момент инерции круга

По определению полярного момента инерции (3.14)

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

Заменим интеграл по площади интегралом по радиусу

$$J_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_A \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32},$$

Так как  $J_p = J_x + J_y$  и для круга  $J_x = J_y$ , то осевой момент инерции

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

### Прямоугольный треугольник.

Определим момент инерции треугольника относительно оси  $x_1$ , совпадающей с его нижней стороной.

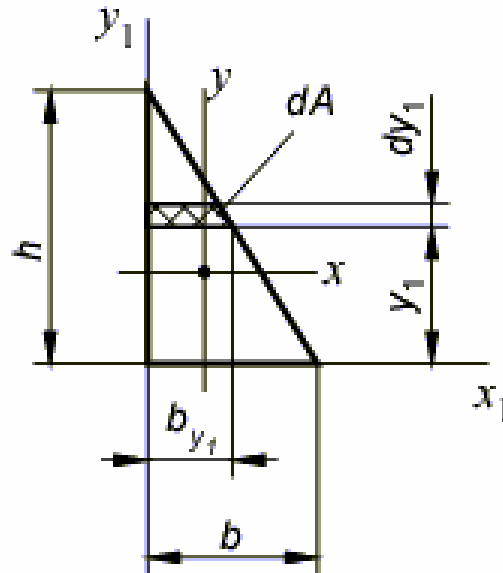


Рис. 3.6 – Момент инерции треугольника

Выделим на расстоянии  $y_1$  от оси  $x_1$  элементарную площадку  $dA$  высотой  $dy$ . Ширина площадки из подобия треугольников:

$$b_{y1} = b \frac{h - y_1}{h}$$

Момент инерции

$$J_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_0^h y_1^2 b \frac{h - y_1}{h} dy_1 = b \frac{y_1^3}{3} \left|_0^h - \frac{b \cdot y_1^4}{h \cdot 4} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}.$$

Относительно центральной оси

$$J_x = J_{x1} - \left( \frac{h}{3} \right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}.$$

Аналогично для второй оси

$$J_y = \frac{hb^3}{36}, \quad J_{y1} = \frac{hb^3}{12}.$$

### 3.2.3 Теорема о моментах инерции при повороте осей координат

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью  $A$ . Пусть известны моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ :  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ . Требуется определить моменты инерции  $J_{x1}$ ,  $J_{y1}$ ,  $J_{x1y1}$  относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ , повернутых по отношению к осям  $x$  и  $y$  на угол  $\alpha$ .

Выделим в окрестности точки  $K$  с координатами  $x$  и  $y$  элементарную площадку  $dA$ .

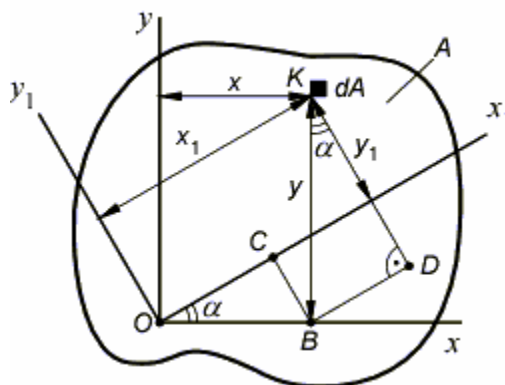


Рис. 3.7 – Поворот координатных осей  
Координаты площадки  $dA$  в повернутой системе координат:

$$x_1 = OC + BD = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha.$$

$$y_1 = KD - CB = y \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha.$$

Осевые моменты инерции:

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha,$$

Сложив попарно левые и правые части полученных уравнений, найдем:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y.$$

Таким образом, сумма моментов инерции относительно осей прямоугольной системы координат не изменяется при их повороте. Как было показано выше, эта сумма равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

**Центробежный момент инерции:**

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\ &= J_{xy} \cos^2 \alpha - J_y \frac{\sin 2\alpha}{2} + J_x \frac{\sin 2\alpha}{2} - J_{xy} \sin^2 \alpha = \\ &= J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

### 3.3 Понятие о главных осях. Главные моменты инерции

Главными осями называются такие оси координат, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Пользуясь теоремой о моментах инерции при повороте осей координат, найдем положение главных осей:

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha = 0.$$

Разделим каждое из слагаемых на  $\cos 2\alpha$  :

$$J_{xy} + \operatorname{tg} 2\alpha \frac{J_x - J_y}{2} = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

Полученный угол  $\alpha$  откладывается против часовой стрелки относительно исходной системы координатных осей.

Моменты инерции в главных осях координат принимают экстремальные значения. Для доказательства возьмем первую производную от  $J_{x_1}$  по  $\alpha$  и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} &= -2J_x \sin \alpha \cos \alpha + 2J_y \cos \alpha \sin \alpha - J_{xy} 2 \cos 2\alpha = \\ &= 2 \left( J_y \cos \alpha \sin \alpha - J_x \sin \alpha \cos \alpha - J_{xy} \cos 2\alpha \right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

или :

$$\frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

то есть среди множества осей, которые можно провести через заданную точку именно относительно главных осей осевые моменты инерции принимают экстремальные значения.

Взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна совпадает с осью симметрии, являются главными осями.

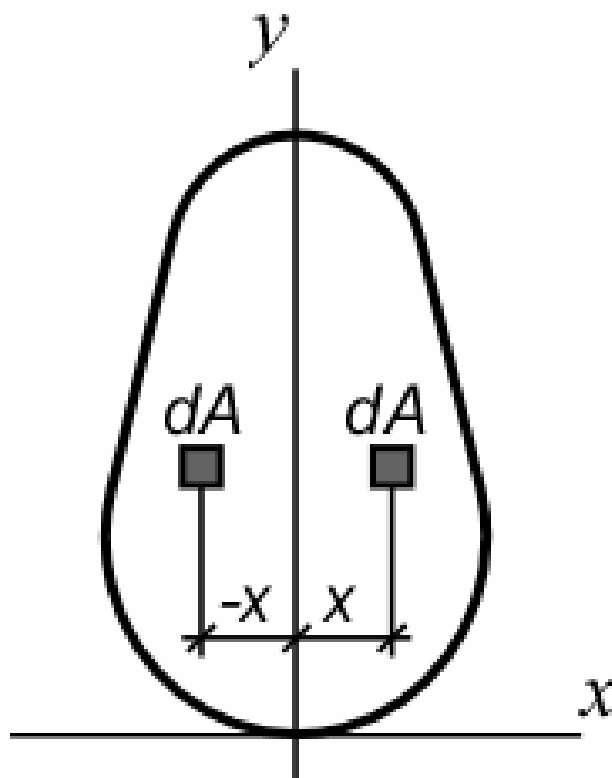


Рис. 3.8 – Главные оси инерции

Очевидно, что каждой элементарной площадке, расположенной по одну сторону от оси симметрии, соответствует точно такая же по другую сторону, для которой произведение координат отличается только знаком. Таким образом, центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_A xy dA,$$

Главные оси можно провести через любую точку сечения, однако наибольший интерес представляют главные оси, проходящие через центр тяжести (главные центральные оси).

Интересно, что, если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой ( $J_x = J_y$ ,  $J_{xy} = 0$ ), то, согласно теореме о моментах инерции при повороте осей координат, у этого сечения любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции одинаковы. Такие фигуры имеют более двух осей симметрии (равносторонний треугольник, квадрат, другие правильные многоугольники, круг, кольцо).